

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ТЕЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. О. Лапич¹, М. Ю. Медведик²

^{1, 2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lapich.a@yandex.ru, ²medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – разработка методов неинвазивного определения диэлектрических параметров неоднородностей внутри тела. Данная проблема возникает в акустике, электродинамике, дефектоскопии, а также в медицине. *Материалы и методы.* Процесс рассеяния электромагнитных волн внутри тела описывается системой уравнений Максвелла. Данная система сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению. Представлен двухшаговый метод, позволяющий определять неоднородности внутри тела с высокой точностью. *Результаты.* Задача решается численно. Порядок получаемой при расчете матрицы около 15 000 элементов. Представлены графические иллюстрации восстановления диэлектрических параметров неоднородностей внутри тела. Проведен физический эксперимент, демонстрирующий изменение поля при внесении неоднородностей в среду. *Выводы.* Предложен и реализован программный комплекс для определения параметров неоднородностей внутри тела.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, объемное интегральное уравнение, численный метод, метод коллокации, векторный анализатор цепей, физический эксперимент

Для цитирования: Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2023. № 4. С. 142–153. doi: 10.21685/2227-8486-2023-4-9

METHOD FOR RESTORING THE PARAMETERS OF BODY INHOMOGENEITIES FROM THE RESULTS OF ELECTROMAGNETIC FIELD MEASUREMENTS

A.O. Lapich¹, M.Yu. Medvedik²

^{1, 2} Penza State University, Penza, Russia

¹lapich.a@yandex.ru, ²medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The aim of the work is to develop methods for non-invasive determination of dielectric parameters of inhomogeneities inside the body. This problem arises in acoustics, electrodynamics, flaw detection, and also in medicine. *Materials and methods.* The process of electromagnetic wave scattering inside a body is described by a system of Maxwell's equations. This system reduces to a volume singular integral equation. A two-step method is presented which allows to determine inhomogeneities inside the body with high accuracy. *Results.* This problem is solved numerically. The size of the matrix

obtained in the calculation is about 15 000 elements. Graphical illustrations of restoration of dielectric parameters of inhomogeneities inside the body are presented. A physical experiment has been carried out to demonstrate the change in the field when inhomogeneities are set into the medium. *Conclusions.* A software package for determining the parameters of inhomogeneities inside the body has been proposed and realized.

Keywords: Maxwell's system of equations, volume integral equation, numerical method, collocation method, vector network analyzers, physical experiment

For citation: Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Method for restoring the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2023;(4):142–153. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2023-4-9

Введение

Обратные задачи дифракции представляют большой интерес в различных областях науки и техники. Они находят свое применение в таких областях, как акустика, электродинамика, дефектоскопия, медицина. Так, например, с помощью рассеянного поля от некоторого объекта можно определить его структуру и параметры неоднородностей, не нарушая целостности данного объекта.

Рассмотрим медицинское применение данных задач. Будем производить моделирование диагностики такого заболевания, как рак молочной железы. Согласно статистике, это заболевание является довольно распространенным среди женщин в различных возрастных категориях: 30 до 40 лет – из 1000 женщин рак груди выявляется у четырех, от 50 до 60 – у 20, от 70 до 80 – у 37 пациенток. Отмечается, что в случае обнаружения злокачественных опухолей молочной железы на начальных стадиях выживаемость пациенток составляет почти 100 %. Однако при поздней диагностике таких новообразований показатель падает примерно до 25 %.

Согласно исследованиям, проведенными аналитиками GLOBOCAN [1], которые публикуют ежегодные данные об онкологических заболеваниях, в 2018 г. было зарегистрировано 18,1 млн новых случаев в 185 странах. Смертность от данного заболевания составляет более 50 %. Первое место по числу онкологических заболеваний занимает рак легких, на втором месте рак молочной железы. Статистика показывает, что последним заболеванием страдают более 10 % женщин [2].

Для обнаружения и диагностики заболевания используются такие методы, как магнитно-резонансная томография (МРТ), рентген-диагностика, биопсия и т.д. Приведенные методы имеют как свои преимущества, так и недостатки. Например, рентгеновская компьютерная томография (РКТ) – это послойное исследование внутренних органов человека рентгеновским (или также ионизирующим) излучением. Оно представляет собой электромагнитные волны, находящиеся в диапазоне между ультрафиолетовым и гамма-излучением, фотоны которого имеют энергию от 100 эВ до 250 кэВ, что соответствует излучению с частотой от 3×10^{16} Гц до 6×10^{19} Гц. Существуют многочисленные исследования, которые указывают на потенциальное влияние сверхвысокой частоты на здоровье человека.

В случае проведения МРТ есть некоторые противопоказания: использование пациентом электронных медицинских приборов в организме, таких как

кардиостимулятор, либо металлических элементов в исследуемой области. Диагностика проводится на частотах от 6×10^7 Гц до 3×10^8 Гц. Описанные выше устройства диагностики являются дорогостоящими или небезопасными для здоровья человека.

При биопсии диагностика выполняется через прокол кожного покрова, который проводится до органа или патологического образования, которое необходимо исследовать. Таким образом, этот принцип исследования является инвазивным, что не является целью нашего исследования. Стоит также принять во внимание высокую стоимость используемого оборудования для диагностики.

Следует отметить проблемы, которые возникают при использовании современных методов диагностики. Первая и основная проблема – это сложность определения опухолей, размер которых составляет менее 1 см. Определение подобных опухолей невозможно технически. Коэффициент контрастности для рентгеновского излучения для мягких тканей составляет менее нескольких процентов, что ведет к большому количеству ложных срабатываний при определении наличия опухоли, поэтому жизненно важно разрабатывать и внедрять неинвазивные методы высокоточной диагностики рака молочной железы, позволяющие проводить диагностику на безопасном оборудовании. В некоторых случаях важно не столько провести точную диагностику заболевания, сколько заподозрить его наличие на раннем этапе.

Диэлектрические свойства опухоли молочной железы в конкретных радиоволновых и микроволновых диапазонах частот показали, что злокачественная ткань имеет диэлектрическую проницаемость (около 50 Ф/м), значительно превышающую диэлектрическую проницаемость нормальной ткани молочной железы (около 30 Ф/м) [3, 4].

Материалы и методы

Для численного эксперимента потребуется устройство, способное определять значение поля в определенных точках [5]. В качестве устройства выбран векторный анализатор цепей Rohde&Schwarz, представленный на рис. 1.

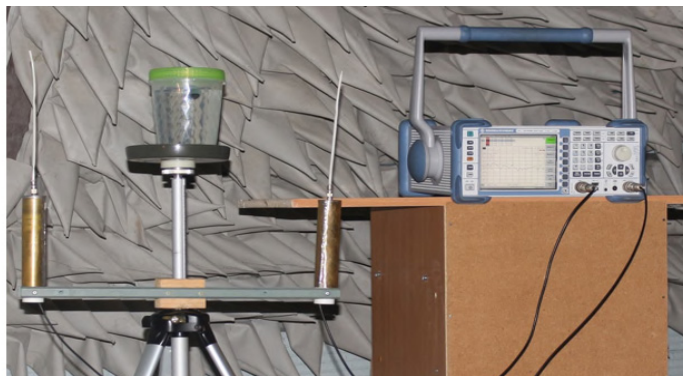


Рис. 1. Экспериментальная установка:
объект исследования, антенны приема/передачи, ВАЦ

В векторном анализаторе цепей (ВАЦ) или Vector Network Analyzers (VNA) есть и источники, и приемники сигналов. Приемники обнаруживают

сигнал, выходящий из того или иного устройства (или из цепи), изменяющийся по сравнению с исходным сигналом, поступившим на устройство. Сравнивая воздействие устройства на ток и напряжение, анализатор цепей может измерять как амплитудные, так и фазовые характеристики устройства. Выполняются измерения характеристик передачи (коэффициента передачи, вносимых потерь, усиления), измерения характеристик отражения (коэффициента отражения, КСВН, потерь на отражение), импеданса и S-параметров (параметров рассеяния) S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} .

В связи с отсутствием возможности проводить эксперименты на людях будем проводить подобные эксперименты на следующей установке, представляющей собой резервуар C , заполненный глицерином, и две антенны A и B (рис. 2). В качестве модели опухоли в резервуар C помещается инородный объект D с диэлектрической проницаемостью, отличной от диэлектрической проницаемости среды, находящейся в резервуаре. Одна из антенн является передающей, а другая – принимающей. Используя данные, получаемые антенной B от антенны A , диагностируем наличие или отсутствие инородных тел в резервуаре C .

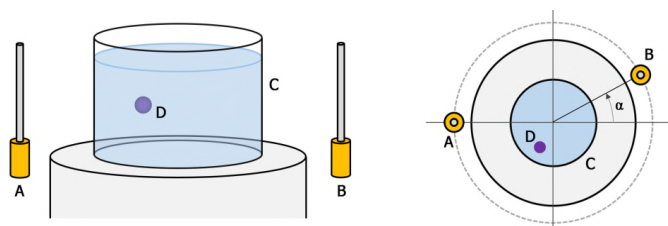


Рис. 2. Диагностический комплекс. Схема установки

Присоединяя векторный анализатор цепей к передающей и принимающей антеннам (см. рис. 1), измеряем величину поля и фазу сигнала. Используем найденные параметры для восстановления диэлектрической проницаемости инородного тела D и для определения его местоположения. Созданный макет устройства позволяет измерять поле под разными углами относительно центра резервуара C . Данная конструкция измерительного устройства позволяет собирать множество данных в различных точках наблюдения, используя угол поворота α и сдвиги вверх и вниз.

Для сравнения экспериментов с инородными телами D проведем измерение, которое будем называть эталонным. Для этого запишем все данные для случая отсутствия инородных тел в резервуаре (рис. 3).

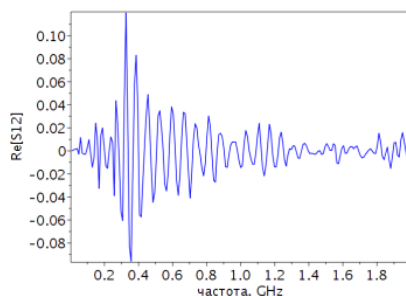


Рис. 3. Коэффициенты матрицы рассеяния (вещественная часть) для эталонного случая F0

Коэффициенты матрицы рассеяния (S-матрицы) для эталонного случая F0, измеряемые ВАЦ, имеют вид, представленный на рис. 3.

Будем проводить измерение только коэффициента S12, поскольку остальные коэффициенты малоинформативны. В качестве *инородного тела* будем использовать резиновый шарик. Относительная диэлектрическая проницаемость резины равна 5 Ф/м, относительная диэлектрическая проницаемость глицерина – 43 Ф/м. Измерения проводились для разных углов α в диапазоне частот от 1 до 2 ГГц. На рис. 4 приведено сравнение коэффициентов S12 для эталонного случая F0 и для случая F1.

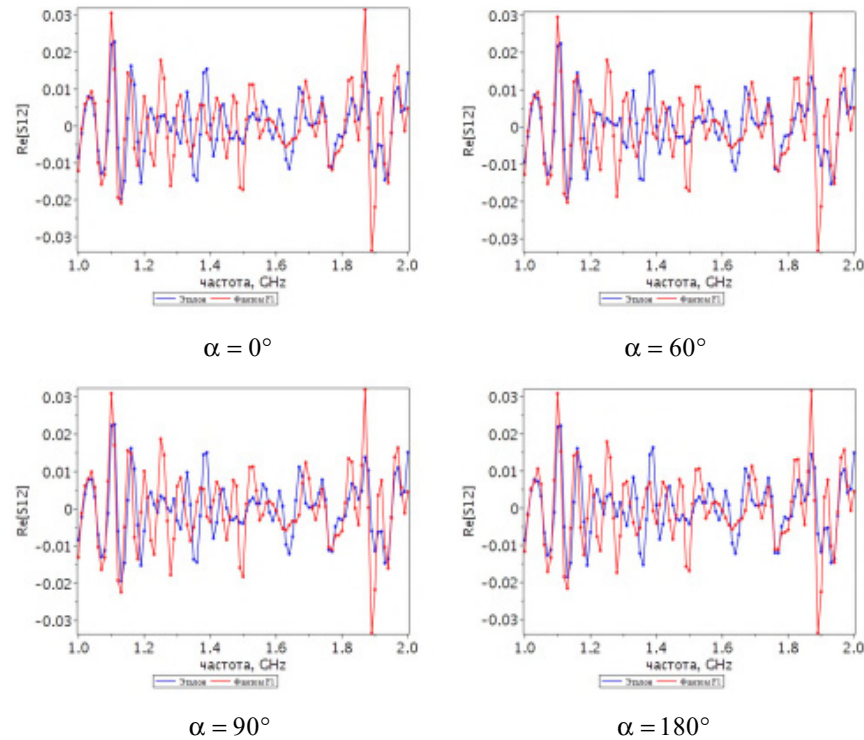


Рис. 4. Коэффициенты вещественной части S12 для эталонного случая F0 (синяя линия) и для случая F1 (красная линия) для разных значений угла α

Подробная постановка задачи на электродинамическом уровне строго описана в работах [6–8]. Результаты подобных исследований приведены в работах [9–20]. Рассмотрим задачу восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в свободном пространстве. Распределение электромагнитного поля в теле описывается уравнением Максвелла, которое, в свою очередь, сводится к объемному интегральному уравнению на теле

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q G_E(x, y) \left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q G_E(x, y) \left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Существуют различные методы для решения подобных интегральных уравнений [5, 13–15], например метод коллокации. Используя интегральное уравнение, можно выписать формулы, позволяющие определить значения и места расположений параметров неоднородности. Для этого выбираем серию точек наблюдения (x_c), расположенных за пределами тела. Данные точки должны располагаться на незначительном удалении от поверхности тел. Расстояние между точками лучше выбрать равноудаленное, что позволит не вносить дополнительную погрешность на этапе нахождения параметров неоднородности. Пример расположения точек наблюдения с двух сторон от тела представлен на рис. 5, где цветными прямоугольниками отмечены места неоднородностей. Получая в данных точках x_c значение электромагнитного поля, решаем поставленную задачу.

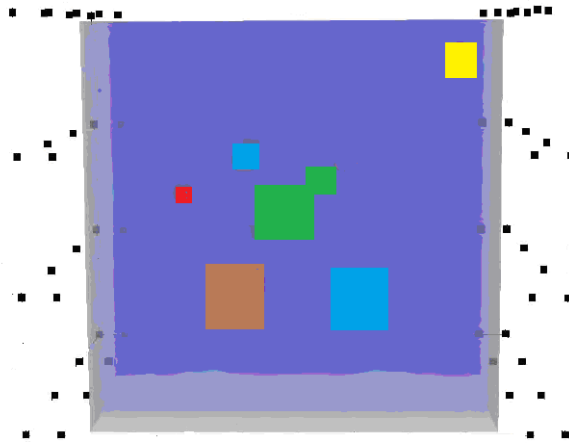


Рис. 5. Исследуемое тело, точки наблюдения, неоднородности

Следуя методу коллокации, для решения интегрального уравнения необходимо произвести дискретизацию задачи. Будем предполагать, что тело Q содержится в параллелепипеде Π , который расположен в свободном пространстве $Q \subset \Pi$:

$$\Pi = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\} \\ (0 \leq a_1 < a_2 \leq a, \quad 0 \leq b_1 < b_2 \leq b, \quad c_1 < x_3 < c_2).$$

Выберем равномерную прямоугольную сетку в Π размера $N_1 \times N_2 \times N_3$, образованную параллелепипедами

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}, \\ x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$.

Пусть тело Q состоит из q подобластей Q_j таких, что $Q = \bigcup_j Q_j$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$. Кроме того, пусть подобласти Q_j состоят из объединения элементарных параллелепипедов (ячеек) сетки $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$. Внутри каждой ячейки будем считать диэлектрическую проницаемость постоянной.

Для моделирования дифракционного поля в точках наблюдения решим ИУ (1) и определим числовые характеристики поля $E(x)$ внутри тела Q . Используя найденные значения поля $E(x)$, вычислим значение поля в точках наблюдения x_c по формуле

$$E(x_c) = E^0(x_c) + k_0^2 \int_Q G_E(x_c, y) J(y) dy + \text{grad div} \int_Q G_E(x_c, y) J(y) dy, x_c \notin Q \quad (2)$$

и решим его относительно неизвестной функции. Далее переходим ко второму этапу, который заключается в нахождении неоднородностей тела. Для их нахождения будем использовать двухшаговый алгоритм, описанный в работах [6–8].

Обозначим через $J(y) = \left[\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - I \right] E(y)$. Далее решаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{J(x_c)}{\left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - I \right)} - E^0(x_c) &= k_0^2 \int_Q G_E(x_c, y) J(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q G_E(x_c, y) J(y) dy, x_c \notin Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) является интегральным уравнением первого рода. Именно в решении данного уравнения состоит наиболее сложная часть задачи восстановления диэлектрической проницаемости тела. Для повышения эффективности решения уравнения можно применять различные методы регуляризации или предобуславливания, которые хорошо проявляют себя до определенных размеров расчетной сетки.

Из уравнения (3) находим $J(x)$ и определяем диэлектрическую проницаемость тела $\epsilon(y)$ в каждой ячейке, используя формулу пересчета:

$$\frac{J(x)}{\left(\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - 1 \right)} - \left(k_0^2 \int_Q G_E(x, y) J(y) dy + \text{grad div} \int_Q G_E(x, y) J(y) dy \right) = E^0(x), x \in Q \quad (4)$$

В случае решения задачи описанным методом удастся эффективно восстанавливать параметры неоднородностей при размере расчетной сетки не более чем $8 \times 8 \times 8$. При больших размерах, порядка $10 \times 10 \times 10$, восстановление параметров удастся получить путем вращения объекта либо проведением серии экспериментов на различных частотах. В случае необходимости решения

задачи на более мелкочаистой сетке используется объединенная расчетная сетка на этапе решения задачи двухшаговым алгоритмом (обработка полученных данных). Определение неоднородностей на подобных сетках приводит к введению дополнительных точек в ячейках сетки, определяемых методом коллокации, т.е. фактически задача решается не с кусочно-постоянными базисными функциями, а с использованием сплайнов нулевого порядка. Данный подход позволяет эффективно решать многомерные интегральные уравнения первого рода, что было проверено авторами на серии подобных задач.

Результаты

Приведем результаты восстановления диэлектрической проницаемости кубического тела Q , расположенного в свободном пространстве. Размеры тела $a = 0,15$ м, $b = 0,15$ м, $c = 0,15$ м. Волновое число в свободном пространстве $k_0 = 250$ м⁻¹. Размер расчетной сетки $16 \times 16 \times 16$. На рис. 6 представлено исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела Q . На рис. 7 представлено восстановленное значение модуля диэлектрической проницаемости тела Q .

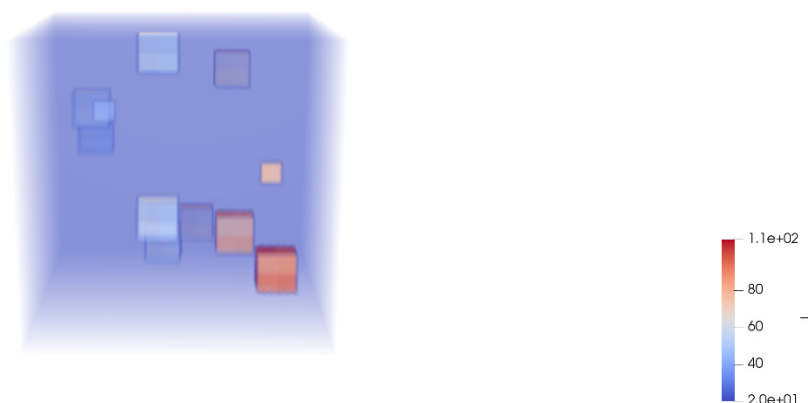


Рис. 6. Исходные значения диэлектрических параметров тела

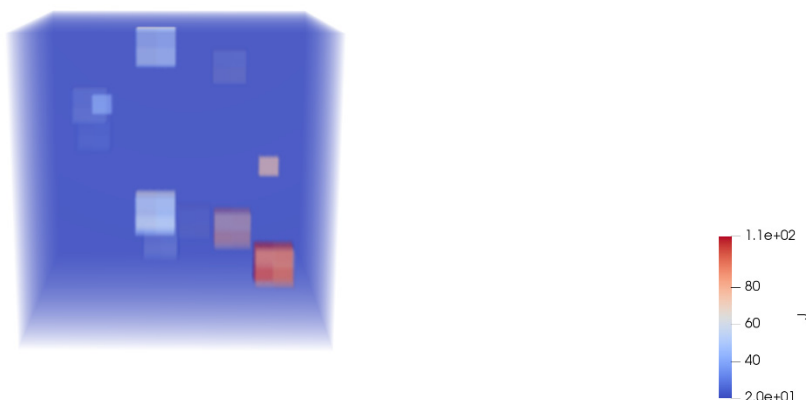


Рис. 7. Восстановленные значения диэлектрических параметров тела

Максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости составляет порядка 10^{-6} . Для восстановления данных неоднородности тела в предыдущем эксперименте были использованы исходные значения без внесения погрешности.

В последнем эксперименте была введена погрешность 5 % при моделировании значений поля в точках наблюдений. Результат показывает сохранение позиций неоднородностей и их значений (рис. 8). Погрешность вычисления неоднородностей пропорциональна 5 %.

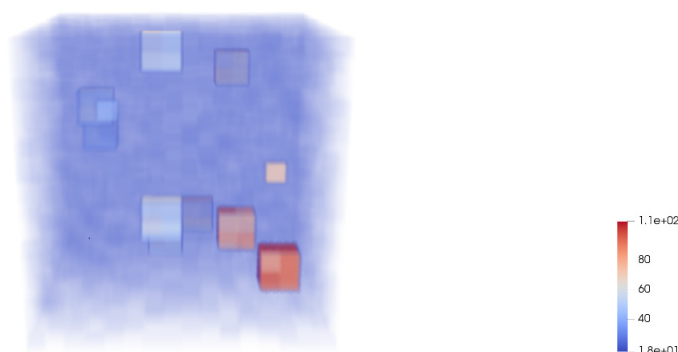


Рис. 8. Результаты с добавлением шума 5 % на этапе измерений

Заключение

В работе были описаны методы восстановления параметров объекта (как однородного, так и неоднородного). Произведены сравнения графиков коэффициентов матрицы рассеяния при эксперименте для эталонного случая, а также с «неоднородностью». Результаты были проведены для различных значений угла. Описана физическая экспериментальная модель.

Метод демонстрирует хорошую устойчивость при добавлении шума на этапе получения данных, удерживает погрешность 5 % и более, при этом не теряется ни сама неоднородность, ни ее расположение, что говорит о применении данного подхода при реализации технических устройств.

Список литературы

1. Ferlay J., Colombet M., Soerjomataram I. [et al.]. Estimates of world wideburden of cancer in 2008: GLOBOCAN 2008 // International Journal of Cancer. 2010. Vol. 15, № 127. P. 2893–2917.
2. Lykkesfeldt A. E., Iversen B. R., Jensen M. B. [et al.]. Aurora kinase A as a possible marker of endocrine in early estrogen receptor for breast cancer // Acta Oncologica. 2018. Vol. 57. P. 67–73.
3. Gabriel S., Lau R. W., Gabriel C. The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz // Physics in Medicine and Biology. 1996. Vol. 41, № 11. P. 2251–2269.
4. Meaney P. M., Fang Q., Rubaek T. [et al.]. Log transformation benefits parameter estimation in microwave tomographic imaging // Medical Physics. 2007. Vol. 34. P. 2014–2023.
5. Смирнов Ю. Г., Медведик М. Ю., Цупак А. А. Суперкомпьютерное моделирование для решения прикладных задач электродинамики. Отчет о НИР 1.894.2017/ ПЧ. 2019.

6. Smirnov Y. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020. Vol. 28. P. 1474–1492.
7. Smirnov Y. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2023.
8. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. *Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory*. Moscow : RU-SCIENCE, 2018. 212 p.
9. Samokhin A. B. *Integral Equations and Iteration Methods in Electromagnetic Scattering*. Berlin : De Gruyter, 2001. 101 p.
10. Smirnov Y. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Two-Step Method for Solving Inverse Problem of Diffraction by an Inhomogeneous Body // *Nonlinear and inverse problems in electromagnetics*. 2018. P. 83–92.
11. Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu. *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*. New York : Springer, 2004. 291 p.
12. Ammari H., Kang H. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2004. 238 p.
13. Romanov V. G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. The Netherlands : VNU, 1986. 239 p.
14. Beilina L., Klibanov M. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient* // *Inverse Problems*. New York : Springer, 2012. 419 p.
15. Kress R. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1989. Vol. 82. P. 412.
16. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // *Communications in Partial Differential Equations*. 2019. Vol. 44. P. 1140–1158.
17. Liu R., Yu H., He K., Luo Y. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography // *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2016. Vol. 25. P. 1–22.
18. Xu Y., Yu H., Sushmit A. [et al.]. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data // *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2022. Vol. 30. P. 433–445.
19. Davison M. E. A singular value decomposition for the Radon transform in ndimensional Euclidean space // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1981. Vol. 3. P. 321–340.
20. Романов В. Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022. № 504. С. 36–41.

References

1. Ferlay J., Colombet M., Soerjomataram I. et al. Estimates of world wideburden of cancer in 2008: GLOBOCAN 2008. *International Journal of Cancer*. 2010;15(127):2893–2917.
2. Lykkesfeldt A.E., Iversen B.R., Jensen M.B. et al. Aurora kinase Aas a possible marker of endocrine in early estrogen receptor for breast cancer. *Acta Oncologica*. 2018;57:67–73.
3. Gabriel S., Lau R.W., Gabriel C. The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz. *Physics in Medicine and Biology*. 1996;41(11):2251–2269.
4. Meaney P.M., Fang Q., Ruback T. et al. Log transformation benefits parameter estimation in microwave tomographic imaging. *Medical Physics*. 2007;34:2014–2023.
5. Smirnov Yu.G., Medvedik M.Yu., Tsupak A.A. *Superkomp'yuternoe modelirovanie dlya resheniya prikladnykh zadach elektrodinamiki. Otchet o NIR 1.894.2017/PCh = Supercomputer modeling for solving applied problems of electrodynamics. Research Report 1.894.2017/PM*. 2019. (In Russ.)

6. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28:1474–1492.
7. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2023.
8. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. *Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory*. Moscow: RU-SCIENCE, 2018:212.
9. Samokhin A.B. *Integral Equations and Iteration Methods in Electromagnetic Scattering*. Berlin: De Gruyter, 2001:101.
10. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Two-Step Method for Solving Inverse Problem of Diffraction by an Inhomogeneous Body. *Nonlinear and inverse problems in electromagnetics*. 2018:83–92.
11. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu. *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*. New York: Springer, 2004:291.
12. Ammari H., Kang H. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 2004:238.
13. Romanov V.G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. The Netherlands: VNU, 1986:239.
14. Beilina L., Klibanov M. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient. *Inverse Problems*. New York: Springer, 2012:419.
15. Kress R. *Linear Integral Equations. Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1989:82:412.
16. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Communications in Partial Differential Equations*. 2019;44:1140–1158.
17. Liu R., Yu H., He K., Luo Y. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography. *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2016;25:1–22.
18. Xu Y., Yu H., Sushmit A. et al. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data. *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2022;30:433–445.
19. Davison M.E. A singular value decomposition for the Radon transform in ndimensional Euclidean space. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1981;3:321–340.
20. Romanov V.G. Inverse problem for a semi-linear wave equation. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya = Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes*. 2022;(504):36–41. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Олегович Лапич

ассистент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Andrey O. Lapich

Assistant of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modelling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modelling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 04.09.2023

Поступила после рецензирования/Revised 26.10.2023

Принята к публикации/Accepted 17.11.2023