УДК 519.218 DOI 10.21685/2227-8486-2020-3-9

ФУНКЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ П. ЛЕВИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ Л. ЗАДЕ

В. А. Смагин, А. Н. Новиков

FUNCTION OF CONCENTRATION P. LEVY AND ITS APPLICATIONS IN THE THEORY OF FUZZY SETS L. ZADEH

V. A. Smagin, A. N. Novikov

Аннотация. *Предмет и цель работы.* Представлены результаты исследования понятия «Функция концентрации», его смыслового содержания. Авторами преследуется цель расширить возможности применения функции концентрации как одной из характеристик случайной величины на область решения прикладных задач, связанных с необходимостью использования не только гладких функций, но и функций, имеющих разрывы, что характерно в случаях решения задач построения моделей принятия решений при неточной исходной информации средствами теории нечетких множеств, представляющих собой попытку упростить решение проблемы «концентрации» на более простом математическом уровне. *Методы*. Исследованы возможности применения принципов построения функции концентрации к функциям принадлежности теории нечетких множеств Л. Заде на примере построения функций концентрации к трапецеидальной и треугольной функциям принадлежности. *Результаты и выводы*. Показано, что применение принципов построения функции концентрации к функциям принадлежности возможно при условии сведения функций принадлежности к функциям плотности вероятностей и затем нахождения на основе функций распределения вероятностей параметров концентрации функций принадлежности. При этом любые разрывные функции принадлежности могут быть использованы для нахождения необходимых функций концентраций, присущих им. Из рассмотренных в работе примеров следует, что функция концентрации для любого распределения вероятностей представляет собой новую, вложенную функцию распределения случайной величины концентрации для рассмотренного базового распределения. Изложены рекомендации по применению функции концентрации в различных прикладных областях науки. Кроме того, в работе показано, что величина концентрации может быть определена на основе величины «ресурса надежности», предложенного профессором Н. М. Седякиным в 1965 г. Предложенный в работе подход к построению функции принадлежности на основе принципов моделирования функции концентрации может найти применение в решении множества задач различного характера, в том числе, например, при разработке экспертных систем в современной метрологии.

Ключевые слова: функция концентрации, распределение вероятностей, функция принадлежности.

Abstract. *Subject and goals*. This article presents the results of the study of the concept of "Concentration function", its semantic content. The authors aim to expand the possibilities of using the concentration function as one of the characteristics of a random variable to the area of solution of applied problems associated with the need to use not only smooth functions, but also functions with discontinuities, which is typical in cases of solving problems of constructing decision-making models with inaccurate initial information by means of the theory of fuzzy sets and represent an attempt to simplify the solution to the problem of "concentration" on a simpler mathematical level. *Methods.* The possibilities of applying the principles of constructing the concentration function to the membership functions of L. Zadeh's theory of fuzzy sets have been investigated by the example of constructing concentration functions to the trapezoidal and triangular membership functions. *Results and conclusions.* The article shows that the application of the principles of constructing a concentration function to membership functions is possible provided that membership functions are reduced to probability density functions and then, based on the probability distribution functions, the concentration functions of the membership functions are found. Moreover, any discontinuous membership functions can be used to find the necessary concentration functions inherent in them. It follows from the examples considered in the work that the concentration function for any probability distribution is a new, nested distribution function of a random variable of concentration for the considered basic distribution. The article contains recommendations for the application of the concentration function in various applied fields of science. In addition, the work shows that the concentration value can be determined based on the value of the "reliability resource" proposed by professor N. M. Sedyakin in 1965. The proposed approach to the construction of the membership function based on the principles of modeling the concentration function can find application in solving many problems of a different nature, including, for example, in the development of expert systems in modern metrology.

Keywords: concentration function, distribution of probabilities, function of accessories.

Введение

Исследования, отдельные результаты которых представлены в данной статье, преследуют цель расширить возможности применения функции концентрации [1–6] как одной из характеристик случайной величины на область решения прикладных задач, связанных с необходимостью использования не только гладких функций, но и функций, имеющих разрывы, что характерно в случаях решения задач построения моделей принятия решений при неточной исходной информации средствами теории нечетких множеств [7, 8] и представляют собой попытку упростить решение проблемы «концентрации» на более простом математическом уровне. Обращаясь к [9], приведем трактовку понятия «концентрация» в широком смысле: «cocentratio» – сосредоточение, скапливание, собирание кого-либо, чего-либо в одном месте. Оно, как и вероятностное понятие «мода», может играть важную роль в решении практических задач, как это показано в работах [9–11]. Поэтому цель настоящей статьи – более глубокое изучение и дальнейшее развитие теории, связанной с понятием концентрации с позиции случайных процессов.

Материалы и методика

Функция концентрации П. Леви. Рассмотрим содержание понятия «функция концентрации», описанное в работах Поля Леви [12, 13]. Функция концентрации в теории вероятностей одна из характеристик случайной величины. Она используется в ряде задач в теории вероятностей, в частности, при исследовании свойств сверток распределений и предельных сумм независимых случайных величин [14, 15].

Определение. Пусть дана случайная величина ξ с функцией распределения F. Функцией концентрации величины ξ называется функция $Q_F(x)$, заданная на неотрицательной полуоси следующим образом:

$$Q_F(x)=\max_{t\in R}(F(t+x+0)-F(t)). \quad (1)$$

Ее свойства:

$$Q_F(x)\geq 0. \quad (2)$$

$$Q_F(x)+Q_F(y)\leq Q_F(x+y). \quad (3)$$

$Q_F(x)$ является монотонно неубывающей непрерывной справа функцией.

$$\lim_{x\to\infty} Q_F(x)=1. \quad (4)$$

Рассмотрим на конкретных частных примерах принцип построения функции концентрации. К ним отнесены нормальное и экспоненциальное распределения вероятностей.

Пример 1. Рассмотрим нормальное распределение с плотностью вероятностей $m=20, \sigma=5, t=0,0.1..1, f(t)=\mathrm{dnorm}(t,m,\sigma)$.

На рис. 1 представлена ее функция распределения $F(t)=\int_0^t f(z)dz$.

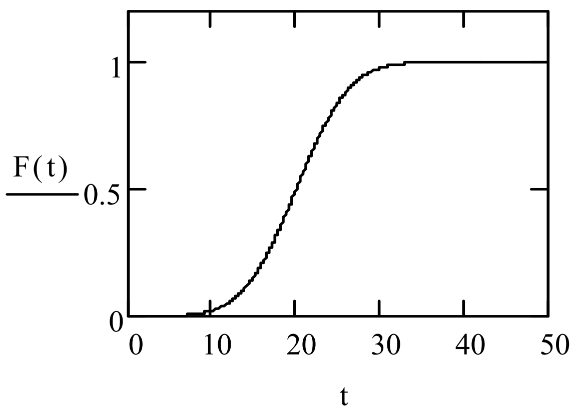


Рис. 1. Функция распределения для $f(t)=\mathrm{dnorm}(t,m,\sigma)$, $m=20, \sigma=5, t=0,0.1..1$

При $t=5, 10, 20, 25, 35$ и $x=3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43$ получим следующие числовые данные для $Q_F(x)$ (табл. 1):

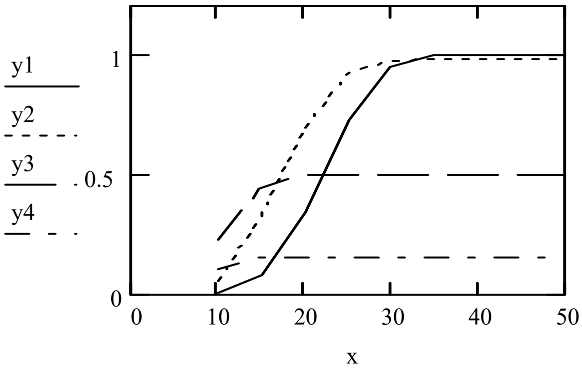
Таблица 1

Числовые данные для $Q_F(x)$

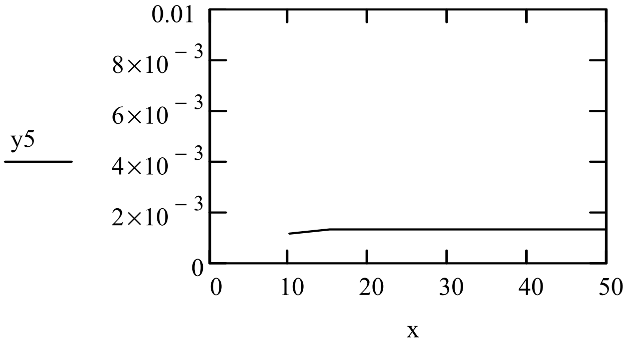
t	$x=(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ 38,\ 43)^T$
5	$y_1=(6.848\times10^{-3}, 0.079, 0.343, 0.724, 0.944, 0.944, 0.998, 0.999, 0.999)^T$
10	$y_2=(0.058,\ 0.332,\ 0.703,\ 0.922,\ 0.973,\ 0.977,\ 0.977, 0.977,\ 0.977)^T$
20	$y_3=(0.226,\ 0.445,\ 0.495,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5)^T$
25	$y_4=(0.104,\ 0.154,\ 0.158,\ 0.159,\ 0.159,\ 0.159,\ 0.159, 0.159,\ 0.159)^T$
35	$y_5=(1.191\times10^{-3},\ 1.348\times10^{-3},\ 1.35\times10^{-3},\ 1.35\times10^{-3}\ldots)^T$

Величина t выполняет роль параметра для функции $Q_F(x)$. Значения параметра t для различных функций $Q_F(x)$ указаны слева от уравнений, а значения аргумента $x-$ в первой строке для всех пяти функций.

На рис. 2,*а*,*б* показаны соответствующие функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.



а)



б)

Рис. 2. Функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

Пример 2. Экспоненциальное распределение с плотностью вероятности $\lambda = 0.05, t = 0, 0.1..1$; $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. На рис. 3 представлена ее функция распределения $F(t) = \int\limits_0^t f(z)dz$.

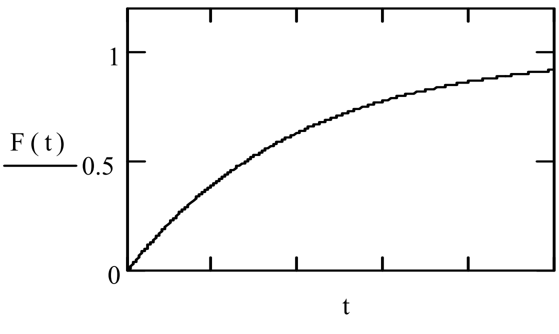


Рис. 3. Функция распределения для $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda = 0.05$, $t = 0, 0.1..1$

При $t = 5, 10, 20, 25, 35$ и $x = 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43$ получим числовые данные для $Q_F(x)$, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Числовые данные для $Q_F(x)$

t	$x = (3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ 38,\ 43)^T$
5	$y_1 = (0.108,\ 0.257,\ 0.372,\ 0.462,\ 0.532,\ 0.587,\ 0.629,\ 0.662, 0.668)^T$
10	$y_2 = (0.084,\ 0.2,\ 0.29,\ 0.36,\ 0.414,\ 0.457,\ 0.49,\ 0.516,\ 0.536)^T$
20	$y_3 = (0.051,\ 0.121,\ 0.176,\ 0.218,\ 0.251,\ 0.277,\ 0.297, 0.313,\ 0.325)^T$
25	$y_4 = (0.04,\ 0.094,\ 0.137,\ 0.17,\ 0.196,\ 0.216,\ 0.231,\ 0.244, 0.253)^T$
35	$y_5 = (0.024,\ 0.057,\ 0.083,\ 0.103,\ 0.119,\ 0.131,\ 0.14,\ 0.148, 0.154)^T$

На рис. 4 показаны соответствующие функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.

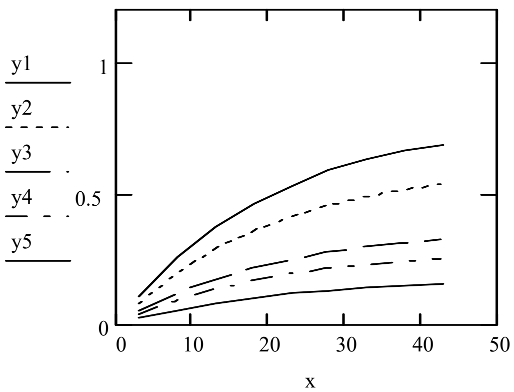


Рис. 4. Функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

Результаты исследования функций концентрации для нормального и экспоненциального распределений свидетельствуют о том, что чем более сосредоточена функция распределения на оси *t*, тем раньше начинает расти функция концентрации и тем раньше она достигает максимального значения.

Результаты и обсуждение

Применение принципов построения функции концентрации к функциям принадлежности теории нечетких множеств Л. Заде. Рассмотрим примеры применения принципов построения функции концентрации к функциям принадлежности, иллюстрирующие изучение свойств сначала трапецеидальной, а затем и треугольной функций принадлежности.

Пример 3. Данный пример посвящен изучению функции концентрации – не функции распределения вероятности, а функции принадлежности теории нечетких множеств [7, 8]. В качестве такой функции рассматривается трапецеидальная функция принадлежности с исходными данными: $a = 5, b = 10$, $c = 30, d = 35$.

Сначала вводятся промежуточные функции:

$$\nu(t)=\frac{t-a}{b-a},\quad k(t)=\frac{d-t}{d-c},\quad m(t)=1, \tag{5}$$

которые представляются сначала в виде линейного оператора программирования, а затем функцией принадлежности с аргументом t:

$$\mu(t)=\left|\begin{array}{l}\dfrac{t-a}{b-a}\ \ if\ \ a\le t\le b;\\ 1\ \ if\ \ b<t\le c;\\ \dfrac{d-t}{d-c}\ \ if\ \ c<t\le 35.\end{array}\right. \tag{6}$$

На рис. 5 представлено изображение функции принадлежности $\mu(t)$.

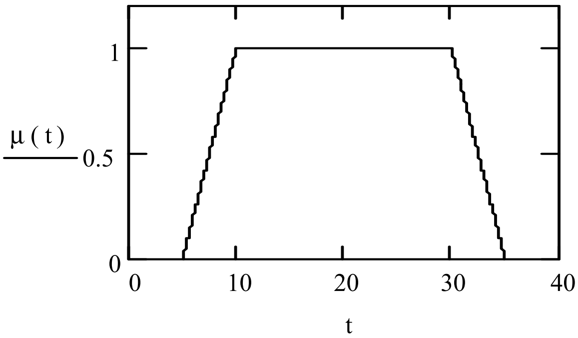


Рис. 5. Функция принадлежности $\mu(t)$

Найдем функцию плотности вероятности для данной функции принадлежности.

Для этого сначала найдем величину площади функции $\mu(t)$, затем коэффициент нормирования и вспомогательные константы проверок:

$$C=\frac{1}{25}=0.04,\ a(t)=\frac{1}{25}\mu(t),\ \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0.04=0.1,\ 0.1\cdot 2=0.2,\ 20\cdot 0.04=0.8,\ 0.2+0.8=1.$$

Далее, окончательно, найдем плотность вероятности для функции принадлежности (рис. 6).

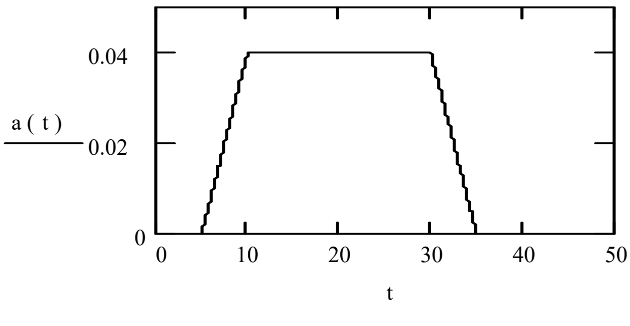


Рис. 6. Плотность вероятности $a(t)$

Функции концентрации $Q(t)$ определяются с помощью функции распределения $F(t)$ (рис. 7), представленной выражением (7):

$$F(t)=\left|\begin{array}{l}\dfrac{(t-5)^2}{250}\ \ if\ \ a\le t\le b;\\ 0.1+\left(\dfrac{t}{25}-\dfrac{2}{5}\right)\ if\ \ b<t\le c;\\ 0.9+\dfrac{(30-t)\cdot(t-40)}{250}\ \ if\ \ c<t\le 35.\end{array}\right. \qquad (7)$$

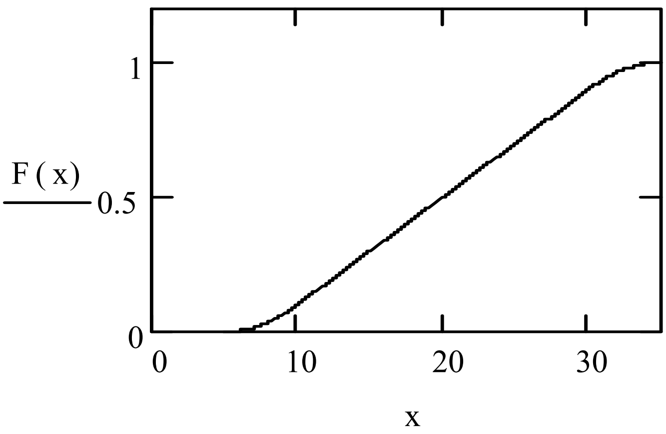


Рис. 7. Функция $F(t)=\int_0^t a(z)dz$

При $t=5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 35$ получаем данные (табл. 3).

Таблица 3

Числовые данные для $Q_F(x)$

t	$x_1=(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28)^T$
5	$y_1=(0.036,\ 0.22,\ 0.42,\ 0.62,\ 0.82,\ 0.984)^T$
	$x_2=(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23)^T$
10	$y_2=(0.12,\ 0.32,\ 0.52,\ 0.72,\ 0.884)^T$
	$x_3=(3,\ 8,\ 13)^T$
20	$y_3=(0.12,\ 0.32,\ 0.484)^T$
	$x_4=(3,\ 8)^T$
25	$y_4=(0.12,\ 0.284)^T$
	$x_5=(3)^T$
35	$y_5=(0.084)^T$

На основании этих данных построены графики на рис. 8.

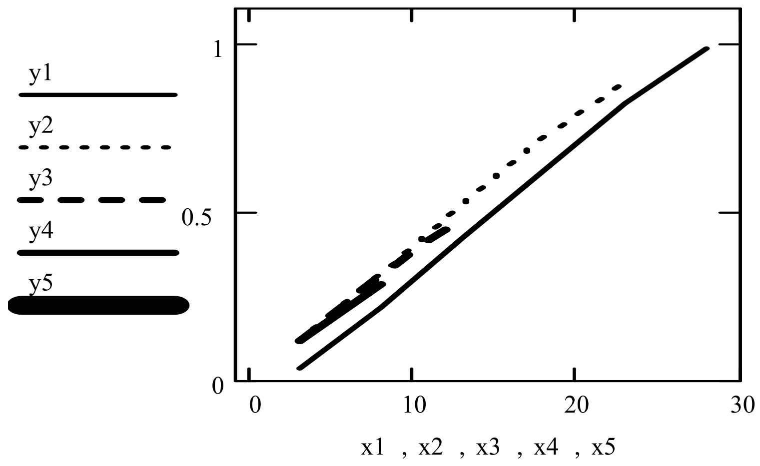


Рис. 8. Функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

Идея построения функций концентрации распространяется и на функции принадлежности теории нечетких множеств. Однако для ее реализации необходимо функции принадлежности свести к функциям плотности вероятностей, а лишь затем на их основе воспользоваться функциями распределений вероятностей для нахождения концентраций функций принадлежности. При этом любые разрывные функции принадлежности могут быть использованы для нахождения необходимых функций концентраций, присущих им. Это подтверждается примерами 3 и 4, иллюстрирующими изучение свойств сначала трапецеидальной, а затем и треугольной функций принадлежности.

Пример 4. Рассмотрим пример построения функции концентрации для треугольной функции принадлежности теории нечетких множеств [8]. В качестве такой функции рассматривается функция принадлежности с аналогичными исходными данными: $a = 5, b = 10, d = 35$. Сначала вводятся промежуточные функции:

$$\nu(x) = \frac{x - a}{b - a},\ k(x) = \frac{d - x}{d - b},\ m(x) = 1, \tag{8}$$

которые представляются сначала в виде линейного оператора программирования, а затем функцией принадлежности с аргументом x:

$$h(x) = \left| \begin{array}{l} v(x)\ \ if\ a \le x \le b; \\ k(x)\ \ if\ b < x \le d; \end{array} \right.$$

$$\mu(t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x - a}{b - a}\ \ if\ a \le x \le b; \\ \dfrac{d - x}{d - c}\ \ if\ c < x \le d. \end{array} \right. \tag{9}$$

На рис. 9 представлена функция принадлежности, а на рис. 10 эквивалент ее плотности вероятности. Коэффициент нормирования 1.

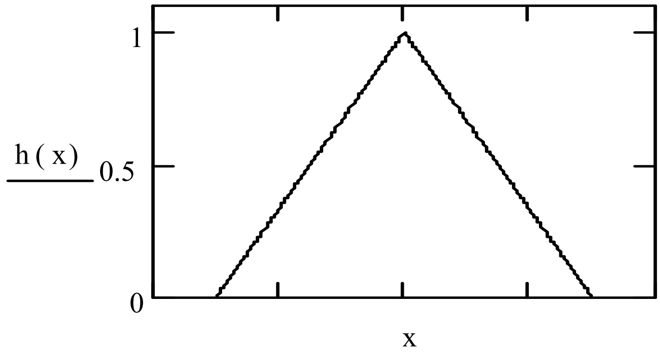


Рис. 9. Функция принадлежности $h(x)$

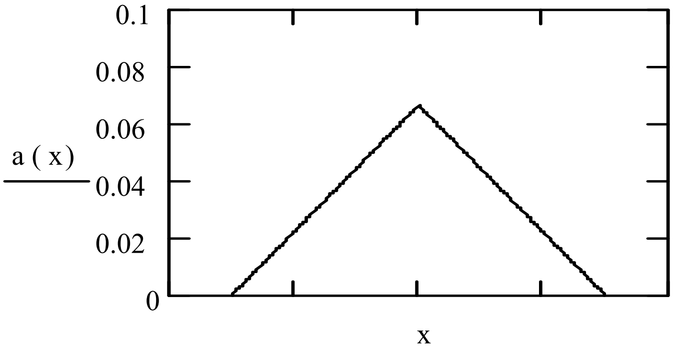


Рис. 10. Эквивалент ее плотности вероятности $a(x)$

Функции концентрации $Q(t)$ определяются с помощью функции распределения $F(t)$, представленной выражением (10):

$$a = 5, b = 10, d = 35,$$

$$F(x) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{(x-5)^2}{450} \;\; if \;\; a < x \le b; \\ 0.5 + \dfrac{(20-x)\cdot(x-50)}{450} \;\; if \;\; b < x \le d. \end{array} \right. \qquad (10)$$

При t = 10, 15, 20, 25, 35 получаем численные значения (табл. 4) для построения графиков (рис. 11).

Из рис. 11 следует особенно наглядно, что чем раньше начинается построение функции концентрации (меньше время t), тем больше значение этой функции с увеличением аргумента x и быстрое достижение предельного значения величины концентрации.

Замечание. Из рассмотренных примеров следует, что функция концентрации для любого распределения вероятностей представляет собой новую, вложенную функцию распределения случайной величины концентрации $Q_F(x)$ для рассмотренного базового распределения $F(t)$. Авторам удалось рассмотреть также два примера построения функции концентрации функций принадлежности теории нечетких множеств.

Таблица 4

Числовые данные для $Q_F(x)$

t	$x_1 = (3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23)^T$
5	$y_1 = (0.087,\ 0.32,\ 0.624,\ 0.836,\ 0.936)^T$
	$x_2 = (3,\ 8,\ 13,\ 18)^T$
10	$y_2 = (0.153,\ 0.458,\ 0.669,\ 0.769)^T$
	$x_3 = (3,\ 8,\ 13)^T$
20	$y_3 = (0.18,\ 0.391,\ 0.491)^T$
	$x_3 = (3,\ 8)^T$
25	$y_4 = (0.113,\ 0.213)^T$
	$x_3 = (3)^T$
35	$y_5 = (0.047)^T$

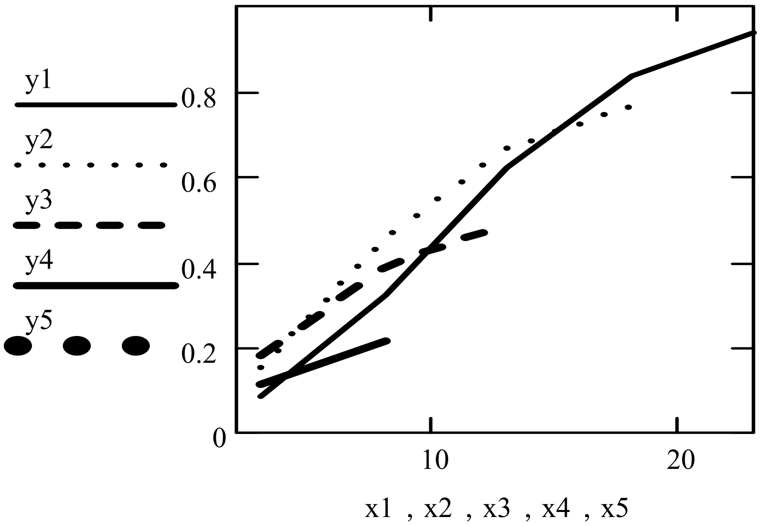


Рис. 11. Функции y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

П. Леви в своих работах [12, 13] приводит несколько теорем с предложениями практической направленности, о которых мы упомянули в начале данной статьи. Они носят, на наш взгляд, теоретическую ценность для изучения предельного поведения сверток случайных величин, а также при изучении поведения сумм значительного количества случайных слагаемых. С нашей точки зрения, изучение функций концентрации должно быть связано более тесно с практическими задачами. Например, с формированием групп экспертов для решения задач по принятию некоторых решений, в частности, при проведении метрологической экспертизы. Поэтому мы сделаем попытку упростить решение проблемы концентрации на более простом математическом уровне. Выполним дополнительное исследование. По своей сути функция концентрации является функцией распределения вероятностей, заданной на положительной оси $x \in R$ с параметром времени t. Поэтому она может иметь начальные и центральные моменты, плотность вероятности, интенсивность отказа и ресурс концентрации:

$$Q_F(x,t) = \max_x (F(t+x+0) - F(t)), \qquad \text{(ДК)}$$

$$q_F(\mathrm{x},t) = \frac{d}{dx} Q_F(x,t), \qquad \text{(Д1)}$$

$$\nu_F^1(x,t) = \int_0^\infty z \cdot q_F(z,t)dz, \qquad \text{(Д2)}$$

$$\nu_F^2(x,t) = \int_0^\infty z^2 \cdot q_F(z,t)dz, \qquad \text{(Д3)}$$

$$\lambda_F(x,t) = \frac{q_F(x,t)}{1 - Q_F(x,t)}, \qquad \text{(Д4)}$$

$$r(x,t) = \int_0^x \lambda_F(z,t)dz. \qquad \text{(Д5)}$$

Тогда, вероятность того, что величина концентрации не менее величины x, будет определяться как

$$P_F(x,\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-r(x,t)} = e^{-\int_0^x \lambda_F(z,t)dz}. \qquad \text{(Д6)}$$

А так как величина ресурса концентрации есть величина случайная, то существуют начальные и центральные моменты случайной величины ресурса концентрации. Они могут определяются из выражения (Д6). Однако этот путь достаточно труден для производства вычислений. Поэтому воспользуемся более простым и наглядным путем. Для этого выполним два примера.

Пример 5. Снова обратимся к рассмотренному ранее примеру 1. В нем были заданы четыре момента времени t на рис. 1 и девять значений аргумента x. Для каждого момента t построена своя функция распределения концентирации на рис. 2 и 4. По значению момента t и аргументам x можно определить величину вероятности по присущим им этим значениям. Данный пример опирается на нормальное теоретическое распределение и набор желаемых значений вероятностей значений величины концентрации. По желанию исследователя все указанные исходные значения могут быть заданы.

Пример 6. Данный пример опирается на пример 4 статьи, связанный с построением и определением значений функций концентрации треугольной функции принадлежности теории нечетких множеств Л. А. Заде. Сущность его состоит в том, что программным путем сначала строится сама функция распределения величины концентрации на основе заданных исходных данных для функции принадлежности. Заметим, что обе функции в примерах 3 и 4 не являются гладкими, им присущи разрывности. Это иллюстрируется рис. 8 и 11. Затем на примере одной из них мы пользуемся известным из теории случайных процессов выражением для вероятности достижения некоторого события (в теории надежности это вероятность безоказной работы системы), имеющим вид

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(z)dz}, \tag{11}$$

где $\lambda(t)-$ интенсивность появления события (например отказа). Выражение (11) можно представить в виде

$$P(t) = e^{-r(t)}, \tag{12}$$

где $r(t) = \int_0^t \lambda(z)dz$ принято называть «ресурсом надежности в смысле профессора Н. М. Седякина» [16].

Его можно трактовать как «запас надежности», который может быть израсходован при работе системы в течение времени t. С нашей точки зрения, его можно трактовать в качестве величины концентрации распределения. Рассмотрим функции $F(t)$ и $Q(t)$ из примера 4 и полученные графики рис. 11. Введем обозначение для написания функции концентрации, перейдя от (12) к $Q(t) = 1 - e^{-r(t)}$ и заменив в этой формуле переменную t на x, получим функцию распределения величины концентрации для треугольной функции принадлежности. А применив понятие ресурса по Н. М. Седякину непосредственно к понятию ресурса концентрации, получим ее графическое представление. Функции концентрации $Q(t)$ определяются с помощью функции распределения $F(t)$:

$$a = 5,\ b = 20,\ d = 35,$$

$$Q(x) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{(x-5)^2}{450} \ \ if\ a < x \le b; \\ 0.5 + \dfrac{(20-x)\cdot(x-50)}{450} \ \ if\ b < x \le d; \end{array} \right. \tag{13}$$

$$r(x) = -\ln\ (1 - Q(x))\ .$$

Представленный переход отображен на рис. 12.

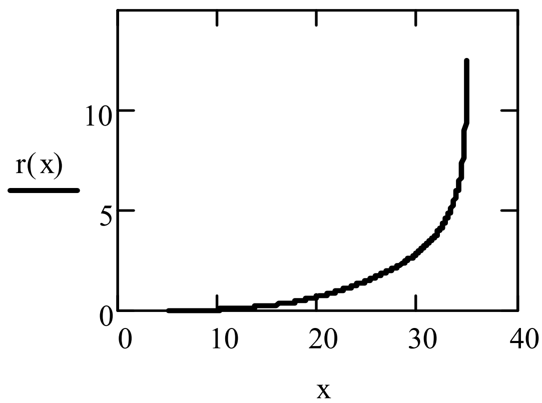


Рис. 12. Графическое представление функции распределения величины концентрации для треугольной функции принадлежности

Необходимые исходные значения параметров функции принадлежности могут быть заменены.

Значения переменной t могут выбираться по усмотрению исследователя в соответствии с (1), также могут рассматриваться для оценивания и значения величин x для построения функции распределения величин концентрации. Например, в нашем примере выберем $t = 5, 10, 15, 20, 30$.

Для этих значений величина концентрации оценивается следующим образом:

$$r(5.01) = 2.222 \times 10^{-7}; \qquad r(5.1) = 2.222 \times 10^{-5}; \qquad r(8) = 0.02;$$

$$r(10) = 0.057; \qquad r(15) = 0.251; \qquad r(20) = 0.057;$$

$$r(30) = 2.89.$$

По значениям полученных чисел можно сделать вывод о том, что величина функции концентрации для треугольной функции принадлежности с увеличением начального базового момента отсчета времени монотонно повышается. При этом шкалу для величины ресурса $r(t)$ можно разбить на несколько одинаковых интервалов и для каждого значения из них построить функцию концентрации. Затем для любого значения из них найти величину риска и величину эффекта (или потерь) в зависимости от поставленной цели решения задачи. Таким образом можно найти ответ на решение некоторой задачи эффективности.

Выводы

Рассмотрена предложенная П. Леви математическая функция концентрации для исследования и решения задач в области случайных процессов. Функция концентрации представляет собой функцию распределения множества случайных величин в зависимости от величины интервала сосредоточения, расположенного на положительной вещественной оси исходной, базовой функции распределения случайных величин. Интервал сосредоточения определяется как расстояние между двумя фиксированными моментами времени, его величина может изменяться от нуля до бесконечного значения. Мощность функции концентрации (вероятность) зависит от длины этого интервала и случайных величин, заключенных внутрь него при условии, что интервал может располагаться в любом месте оси базовой функции распределения. Таким образом, для любого базового распределения построенная функция концентрации является монотонно возрастающей функцией от нуля до единичного значения.

Построенная функция концентрации на основе первой базовой функции сама может рассматриваться в качестве новой базовой функции для построения новой функции концентрации и. т.д. Этот вывод сделан на основании изучения первой функции концентрации.

Принцип построения функции концентрации распространен на функции принадлежности теории нечетких множеств при условии единичного нормирования функций принадлежности. Это позволяет работать не только с гладкими функциями, но и с функциями, имеющими разрывы. Приводятся два примера для подтверждения этого факта.

Кроме того, в работе показано, что величина концентрации может быть определена на основе величины «ресурса надежности», предложенного профессором Н. М. Седякиным в 1965 г. Предложенный в работе подход к построению функции принадлежности на основе принципов моделирования функции концентрации может найти применение в решении множества актуальных задач нечеткого геометрического программирования, постановка которых приведена, например, в работах [17, 18]. Также функции концентрации могут быть использованы при разработке экспертных систем в современной метрологии в качестве альтернативных методов, например, при решении задач, изложенных в работах [19, 20].

Библиографический список

1. *Зайцев, А. Ю.* О скорости убывания функций концентрации кратных сверток вероятностных распределений / А. Ю. Зайцев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2011. – № 2. – С. 29–33.
2. *Бенинг, В. Е.* Об оценках функций концентрации регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема / В. Е. Бенинг, Н. К. Галиева, В. Ю. Королев // Информатика и ее применение. – 2013. – Т. 7, № 1. – С. 116–123.
3. *Королев, В. Ю.* Оценки функций концентрации случайных сумм при ослабленных моментных условиях / В. Ю. Королев, А. В. Дорофеева // Теория вероятностей и ее применение. – 2017. – Т. 62, № 1. – С. 104–121.
4. *Гетце, Ф.* Неравенства Арака для функций концентрации и проблема Литтлвуда–Оффорда / Ф. Гетце, Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев // Теория вероятностей и ее применения. – 2017. – Т. 62, № 2. – С. 241–266.
5. *Dokmanić, I.* Concentration of the Frobenius norm of generalized matrix inverses / I. Dokmanić, R. Gribonval // SIAM Journal on matrix analysis and applications. – 2019. – Vol. 40, № 1. – P. 92–121.
6. *Glebov, R.* On the Concentration of the domination number of the random graph / R. Glebov, A. Liebenau, T. Szabó // SIAM Journal on discrete mathematics. – 2015. – Vol. 29, № 3. – P. 1186–1206.
7. *Заде, Л. А.* Основы нового подхода к анализу сложных процессов принятия решений. Математика сегодня / Л. А. Заде ; под ред. Н. Н. Моисеева. – Москва : Знание, 1974. – С. 5–48.
8. *Zadeh, L. A.* Fuzzy logic theory and applications: Part I and Part II / L. A. Zadeh, R. A. Aliev. – Singapore : World scientific publishing, 2018. – 612 p.
9. *Хенгартнер, В.* Функция концентрации : пер. с англ. / В. Хенгартнер, Р. Теодореску ; под ред. В. М. Золотарева. – Москва : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 176 с.
10. *Tolstikhin, I. O.* Inequalities for samples without replacement / I. O. Tolstikhin // Theory of Probability & Its Applications. – 2017. – Vol. 61, № 3. – P. 462–481.
11. *Marchina, A.* About the rate function in concentration inequalities for suprema of bounded empirical processes / A. Marchina // Stochastic processes and their applications. – 2019. – Vol. 129. – P. 3967–3980.
12. *Levy, P.* Thèorie de l`addition des variables ale`atoires / P. Levy. – Gauthier-Villars, 1954. – 385 p.
13. *Levy, P.* Processus stochastiques et mouvement brownien / P. Levy. – Gauthier-Villars, 1948. – 365 p.
14. *Houdréa, C.* Median, concentration and fluctuations for Lévy processes / C. Houdréa, P. Marchal // Stochastic processes and their applications. – 2008. – Vol. 118. – P. 852–863.
15. *Majka, M. B.* Coupling and exponential ergodicity for stochastic differential equations driven by Lévy processes / M. B. Majka // Stochastic processes and their applications. – 2017. – Vol. 127. – P. 4083–4125.

16. *Седякин, Н. М.* Об одном физическом принципе теории надежности / Н. М. Седякин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1966. – № 3. – С. 80–87.
17. *Sugumaran, V.* Intelligent information technologies: concepts, methodologies, tools, and applications. Contemporary research in information science and technology / V. Sugumaran. – IGI Global, 2007. – 2614 p.
18. *Sahidul, I.* Fuzzy geometric programming techniques and applications. Forum for interdisciplinary mathematics / I. Sahidul, W. A. Mandal. – Springer, 2019. – 359 p.
19. *Garza-Ulloa, J.* A mathematical model for the validation of the ground reaction force sensor in human gait analysis / J. Garza-Ulloa, H. Yu, T. Sarkodie-Gyan // Measurement. – 2012. – Vol. 45. – P. 755–762.
20. Influence of polarization time and polarization current of PtYSZ-based no sensors utilizing the pulsed polarization when applying constant charge // Sensors and actuators B: Chemical. – 2019. – Vol. 290. – P. 28–33.

References

1. Zaytsev A. Yu. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Bulletin of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy]. 2011, no. 2, pp. 29–33. [In Russian]
2. Bening V. E., Galieva N. K., Korolev V. Yu. *Informatika i ee primenenie* [Computer science and its application]. 2013, vol. 7, no. 1, pp. 116–123. [In Russian]
3. Korolev V. Yu., Dorofeeva A. V. *Teoriya veroyatnostey i ee primenenie* [Probability theory and its application]. 2017, vol. 62, no. 1, pp. 104–121. [In Russian]
4. Gettse F., Eliseeva Yu. S., Zaytsev A. Yu. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Probability theory and its applications]. 2017, vol. 62, no. 2, pp. 241–266. [In Russian]
5. Dokmanić I., Gribonval R. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*. 2019, vol. 40, no. 1, pp. 92–121.
6. Glebov R., Liebenau A., Szabó T. *SIAM Journal on discrete mathematics*. 2015, vol. 29, no. 3, pp. 1186–1206.
7. Zade L. A. *Osnovy novogo podkhoda k analizu slozhnykh protsessov prinyatiya resheniy. Matematika segodnya* [Fundamentals of a new approach to the analysis of complex decision-making processes. Math today]. Moscow: Znanie, 1974, pp. 5–48. [In Russian]
8. Zadeh L. A., Aliev R. A. *Fuzzy logic theory and applications: Part I and Part II*. Singapore: World scientific publishing, 2018, 612 p.
9. Khengartner V., Teodoresku R. *Funktsiya kontsentratsii: per. s angl.* [Concentration function: translated from English]. Moscow: Nauka, glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980, 176 p. [In Russian]
10. Tolstikhin I. O. *Theory of Probability & Its Applications*. 2017, vol. 61, no. 3, pp. 462–481.
11. Marchina A. *Stochastic processes and their applications*. 2019, vol. 129, pp. 3967–3980.
12. Levy P. *Thèorie de l`addition des variables ale`atoires* [Theory of the addition of atomic variables]. Gauthier-Villars, 1954, 385 p.
13. Levy P. *Processus stochastiques et mouvement brownien* [Stochastic processes and Brownian motion]. Gauthier-Villars, 1948, 365 p.
14. Houdréa C., Marchal P. *Stochastic processes and their applications*. 2008, vol. 118, pp. 852–863.
15. Majka M. B. *Stochastic processes and their applications*. 2017, vol. 127, pp. 4083–4125.
16. Sedyakin N. M. *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical cybernetics]. 1966, no. 3, pp. 80–87. [In Russian]

17. Sugumaran V. *Intelligent information technologies: concepts, methodologies, tools, and applications. Contemporary research in information science and technology*. IGI Global, 2007, 2614 p.
18. Sahidul I., Mandal W. A. *Fuzzy geometric programming techniques and applications. Forum for interdisciplinary mathematics*. Springer, 2019, 359 p.
19. Garza-Ulloa J., Yu H., Sarkodie-Gyan T. *Measurement*. 2012, vol. 45, pp. 755–762.
20. *Sensors and actuators B: Chemical*. 2019, vol. 290, pp. 28–33.

Смагин Владимир Александрович
доктор технических наук, профессор,
кафедра метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники,
Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского
(Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)
E-mail: va_smagin@mail.ru

Smagin Vladimir Aleksandrovich
doctor of technical sciences, professor,
sub-department of metrological support of weapons, military and special equipment,
Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky
(13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Новиков Александр Николаевич
кандидат технических наук, доцент,
кафедра метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники,
Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского
(Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)
E-mail: alnovikov80@mail.ru

Novikov Alexander Nikolaevich
candidate of technical sciences, associate professor,
sub-department of metrological support of weapons, military and special equipment,
Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky
(13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Образец цитирования:

Смагин, В. А. Функция концентрации П. Леви и ее применение в теории нечетких множеств Л. Заде / В. А. Смагин, А. Н. Новиков // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2020. – № 3 (35). – С. 102–117. – DOI 10.21685/2227-8486-2020-3-9.