

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕЛА ПО ИЗМЕРЕНИЮ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ МИКРОВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ

**А. Д. Барышева¹, И. В. Елисеева²,
А. В. Медведев³, М. Ю. Медведик⁴**

^{1, 2, 3, 4} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ allyprofit@gmail.com, ² innaeliseeva2003@mail.ru,
³ mdl-studio@yandex.ru, ⁴ _medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – применение нейросетевых технологий в задачах восстановления параметров неоднородностей внутри тела. Данная проблема возникает в акустике, электродинамике, дефектоскопии, а также в медицине. *Материалы и методы.* Процесс распространения акустической волны внутри различных объектов описывается с помощью уравнения Гельмгольца. После постановки краевой задачи выполняется переход к интегральному уравнению Липпмана – Швингера. Для решения обратной задачи использован двухшаговый метод. *Результаты.* Задача решается численно. Порядок получаемой при расчете матрицы около 10 000 элементов. Представлены графические иллюстрации восстановления функции неоднородностей внутри тела. Проведен эксперимент, демонстрирующий особенности восстановления параметров тела при использовании нейронных сетей. *Выводы.* Предложен и реализован программный комплекс для определения параметров неоднородностей внутри тела. Показаны преимущества использования нейронных сетей в качестве метода преобуславливания.

Ключевые слова: численные методы, интегральное уравнение, уравнение Гельмгольца, нейронная сеть

Для цитирования: Барышева А. Д., Елисеева И. В., Медведев А. В., Медведик М. Ю. Определение параметров неоднородности тела по измерению скалярного поля в задаче микроволновой томографии // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2024. № 1. С. 94–106. doi: 10.21685/2227-8486-2024-1-7

DETERMINATION OF PARAMETERS OF BODY INHOMOGENEITY BY MEASUREMENT SCALAR FIELD IN THE MICROWAVE TOMOGRAPHY PROBLEM

**A.D. Barysheva, I.V. Eliseeva,
A.V. Medvedev, M.Yu. Medvedik**

^{1, 2, 3, 4} Penza State University, Penza, Russia
¹ allyprofit@gmail.com, ² innaeliseeva2003@mail.ru,
³ mdl-studio@yandex.ru, ⁴ _medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the work is the use of neural network technologies in the problems of restoring the parameters of inhomogeneities within the body. This problem occurs in acoustics, electrodynamics, flaw detection, as well as in medicine. *Materials and*

methods. The process of propagating an acoustic wave inside various objects is described using the Helmholtz equation. After setting the boundary problem, the transition to the Lippmann-Schwinger integral equation is performed. To solve the reverse problem, a two-step method was used. *Results.* The problem is solved numerically. The order of the matrix obtained in the calculation is about 10,000 elements. Graphic illustrations of the recovery of the function of inhomogeneities within the body are presented. An experiment was conducted demonstrating the peculiarities of restoring body parameters when using neural networks. *Conclusions.* Proposed and implemented is software complex for determination of parameters of inhomogeneities inside body. The advantages of using neural networks as a method are shown.

Keywords: numerical methods, integral equation, Helmholtz equation, neural network

For citation: Barysheva A.D., Eliseeva I.V., Medvedev A.V., Medvedik M.Yu. Determination of parameters of body inhomogeneity by measurement scalar field in the microwave tomography problem. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, technology, nature and society.* 2024;(1):94–106. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2024-1-7

Введение

В представленной работе рассматривается численный метод решения обратной задачи акустики, основанный на применении нейронных сетей. Под термином «обратная задача», как правило, описываются вопрос поиска и идентификация неоднородностей в теле или иных объектах. В настоящее время в различных сферах появляется все больше новых классов задач, которые могут быть отнесены к обратным, этим и объясняется большой интерес к решению данных типов задач. Одним из примеров таких задач является медицинская диагностика различных видов заболеваний. Несмотря на наличие большого количества диагностического оборудования разных типов, вопрос об эффективной диагностике заболеваний остается открытым до сих пор. Существует несколько основных проблем, встречающихся при диагностике заболевания. Это дороговизна оборудования, точность измерений и безопасность диагностики для пациентов. Разрешить все перечисленные задачи можно, если разработать новые эффективные математические алгоритмы, позволяющие производить медицинскую диагностику на низком диапазоне частот. Такие алгоритмы могут быть полезны не только в медицине, но и в дефектоскопии.

Стоит отметить, что обратные задачи акустики в большинстве своем являются некорректными и нелинейными, поэтому поиск их решений является очень сложной задачей. Первые попытки решения обратных задач начались с разработки простых итерационных методов. Данный подход имеет свои недостатки и преимущества. К плюсам итерационного подхода стоит отнести возможность использовать фрагментарные и неполные виды данных, к минусам — необходимость нахождения как можно более точного начального приближения.

Многочисленные попытки решения обратных задач дифракции на экранах и телах хорошо изучены в работах отечественных и зарубежных исследователей [1–16].

Материалы и методы

Рассмотрим двумерное тело Q , расположенное в пространстве R^2 . На тело Q воздействует акустическое поле U^0 , созданное точечным источником излучения. Целью прямой задачи акустики является определение поля U , рассеянного на теле (рис. 1).

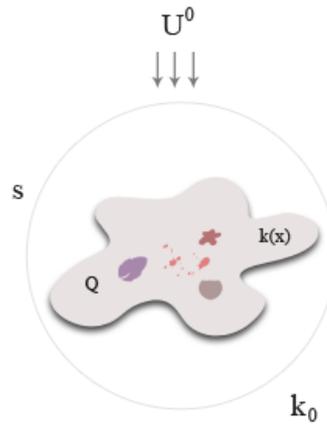


Рис. 1. Задача дифракции на теле

Поведение рассеянного поля U можно определить через решение неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = f(x). \quad (1)$$

Функция является кусочно-непрерывной и определяется соотношением $k^2 = \begin{cases} k^2(x) \\ k_0^2 \end{cases}$. Здесь $k(x)$ определяет волновые параметры внутри тела, Q , k_0 – волновой параметр свободного пространства. Правая часть уравнения (1) задается известной функцией $f(x)$ с компактным носителем. Потребуем выполнения условий сопряжения на границе раздела двух сред:

$$[u]_{\partial Q} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ означает скачок поля.

Для выполнения единственности поставленной задачи запишем условия излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 u + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r := |x| \rightarrow \infty \quad (3)$$

Задача (1)–(3) сводится к линейному неоднородному интегральному уравнению Липпмана – Швингера, используя вторую формулу Грина [3, 8], получаем

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y), \quad (4)$$

где $G(x, y) = H_0^1(k_0 |x - x_0|)$ – функции Ханкеля.

Хорошо известны многочисленные приложения данного интегрального уравнения. Это уравнение играет важную роль не только в акустических

задачах дифракции, но также в электродинамике, квантовой механике и во многих других областях физики.

Перепишем уравнение в операторном виде и сформулируем ряд утверждений.

Пусть

$$Au := \int_Q G(x, y)(k_0^2 - k^2(y))u(y), \quad (5)$$

$u := u(x), F := f^0(x)$, тогда уравнение принимает вид

$$Lu := u - Au = F, \quad (6)$$

где $u \in L_2(Q), F \in L_2(Q), L : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$.

Решения уравнения (4) будем искать, используя пространство $L_2(Q)$.

Утверждение 1.

Оператор $Au := \int_Q G(x, y)(k_0^2 - k^2(y))u(y)$ фредгольмов с нулевым индексом.

Лемма 1.

Решение задачи (1)–(3) единственно [9].

Утверждение 2.

Оператор $L := I - A : L_2(Q)$ непрерывно обратим.

В работах [2–7] проводились численные исследования интегрального уравнения (4).

Идентификация неоднородностей в задачах дифракции в медицинской диагностике возможна только неинвазивными методами, поэтому для их идентификации воспользуемся измерением поля за пределами тела в определенных заранее выбранных точках. Данные точки наблюдения размещаются равномерно вдоль границ исследуемого объекта на небольшом расстоянии друг от друга в несколько слоев. В качестве падающего излучения используется волна, распространяющаяся от точечного источника. В такой постановке задачи возможно применение двухшагового алгоритма для идентификации неоднородностей (рис. 2).

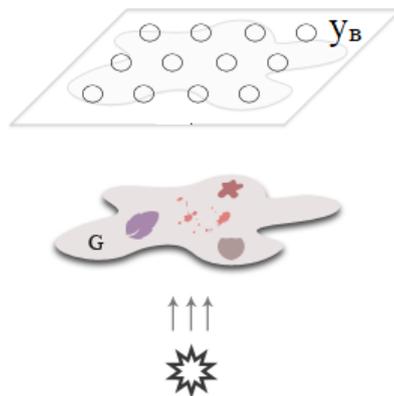


Рис. 2. Тело, источник излучения и точки наблюдения

Разобьем тело плоской формы на ячейки $\Pi_i, i = (i_1, i_2, i_3)$. Введем допущение, что параметры неоднородности внутри каждой ячейки не меняются, $k(x) = k_i$. Применим двухшаговый алгоритм:

1. На первом шаге, используя значения поля $u(y_b)$, измеренные в точках наблюдения y_b , рассчитаем значение тока $J(y)$, решая следующее уравнение:

$$u(y_b) - J(y) = \int_Q G(x, y_b) J(x) dx. \quad (7)$$

Следует отметить, что уравнение (7) является самой сложной частью двухшагового метода, поскольку является уравнением 1-го рода. Система линейных алгебраических уравнений, получаемая в результате решения интегрального уравнения (7), является плохо обусловленной, что приводит к сильно зашумленным восстановленным данным.

2. На втором шаге пересчитываем значение параметров неоднородности $k(y)$, используя значение $J(y)$:

$$k^2(y) - k_0^2 = \frac{J(y)}{f(y) + \int_Q G(x, y_b) J(x) dx}. \quad (8)$$

Для снижения числа обусловленности матрицы можно использовать различные предобуславливатели или методы регуляризации. Это позволяет решать системы линейных алгебраических уравнений больших размеров. В случае использования зашумленных данных в точках наблюдения задача становится некорректной, т.е. малые изменения входных данных приводят к существенным отклонениям в решении задачи. Для борьбы с зашумленными данными можно применять нейронные сети.

Таким образом, задача снижения числа обусловленности матрицы сводится к задаче о шумоподавлении:

$$z = x + y, \quad (9)$$

где z – зашумленные данные, представленные суммой истинных данных x и некоторого шума y . Большинство методов пытаются как можно ближе аппроксимировать x , используя z .

В этом случае может быть удобно использовать такую модель нейронных сетей, как автоэнкодер.

Автоэнкодер является частным случаем нейронной сети с опережающей обратной связью. Это представляет собой вычислительный граф из совокупности операций над данными, называемыми слоями. На вход, в первый слой, он принимает сигнал x и пытается воспроизвести его точную копию на выходе y . После прохождения первого слоя входных данных $x \in [0, 1]^d$ происходит их преобразование в некоторое скрытое представление $h \in [0, 1]^d$ с использованием отображения

$$y = \phi(Wx + b), \quad (10)$$

где ϕ – любая нелинейная функция.

Далее к y применяется преобразование, приводящее его к изначальной размерности:

$$z = s(W'y + b'). \quad (11)$$

В формулах (10), (11) $\{W, B, W', B'\}$ являются параметрами модели, оптимальными с точки зрения минимизации ошибки восстановления, что может быть достигнуто с использованием различных функций потерь, таких как среднеквадратичная ошибка или кросс-энтропия.

Шумоподавляющий автоэнкодер – стохастическое расширение классического автоэнкодера, который рассматривался применительно к задаче восстановления данных по их зашумленому виду. Шумоподавляющие автоэнкодеры могут использоваться в комбинации, образуя глубокую нейронную сеть.

Сверточные автоэнкодеры основаны на классической идее автоэнкодеров, однако вместо обычных преобразований (10), (11) используются сверточные слои нейронной сети.

Под операцией свертки понимается следующее матричное преобразование:

$$y_{ij} = \sum_m \sum_n w_{mn} * x_{(i+m)(j+n)} + b, \quad (12)$$

где $*$ – поэлементное умножение матриц; y_{ij} – матрица на выходе слоя (карта признаков); w_{mn} – параметр (фильтр) слоя; $x_{(i+m)(j+n)}$ – входные данные; b – свободный параметр.

Упрощенно свертку можно понимать как совокупность из сумм поэлементных произведений матрицы параметра и субматриц, полученных из входной матрицы.

В этой связи вводятся такие понятия, как размер свертки (kernel size), шаг сдвига (stride), от которых зависят размер и позиции полученных субматриц.

Более подробно работа сверточных сетей описана в исследовании [17].

В таких сетях применяется операция, называемая пулингом [18]:

$$\delta_i^l = \begin{cases} \delta_j^{l+1} & \text{если } i = \arg \max_j (z_j^l) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (13)$$

При этом размеры выходной матрицы могут быть найдены как

$$H_{out} = \left\lceil 1 + \frac{H - \text{pool_height}}{\text{stride}} \right\rceil, \quad (14)$$

$$W_{out} = \left\lceil 1 + \frac{W - \text{pool_width}}{\text{stride}} \right\rceil, \quad (15)$$

где $\text{pool_height}, \text{pool_width}$ – размер субматрицы пулинга.

По сравнению с классическими автоэнкодерами сверточные автоэнкодеры лучше подходят для обработки изображений, так как они используют все возможности сверточных нейронных сетей для эффективного использования структуры изображения (матрицы). Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе [19]. Пример такой модели представлен на рис. 3.

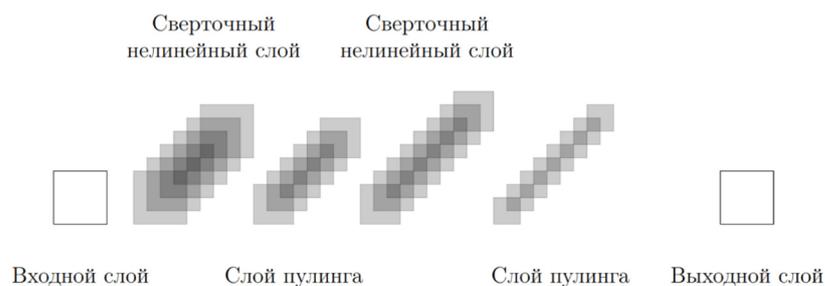


Рис. 3. Пример архитектуры сверточного автоэнкодера

Для задачи были сгенерированы обучающая и тестовая выборки из 700 и 300 примеров соответственно. Для составления очередного экземпляра случайным образом определялись количество, форма, размер и значение параметров неоднородностей в рамках заданных условий.

Затем в полученную матрицу вносился равномерный шум (15 %, 30 %, 50 %). Данные «чистой» и зашумленной матриц сохранялись и затем использовались при обучении и тестировании нейронной сети. Несколько примеров приведены на рис. 4.

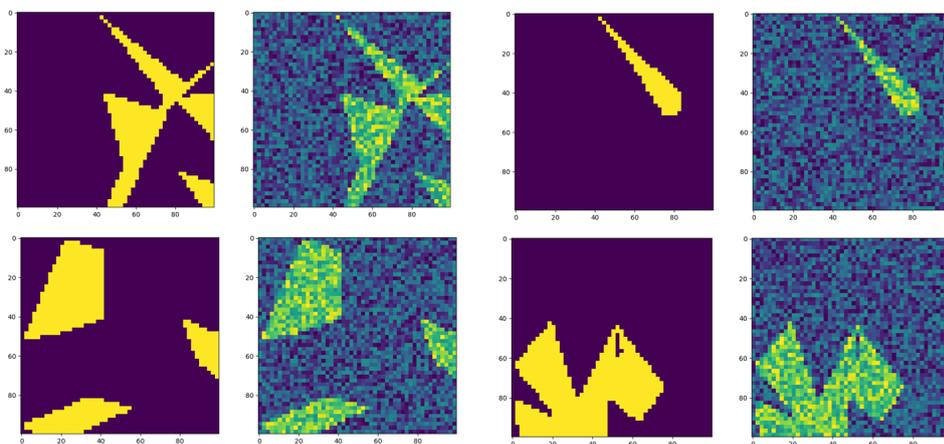


Рис. 4. Сгенерированные исходные (слева) и зашумленные (справа) данные

Рассмотрим задачу с начальными данными неоднородностей (рис. 5).

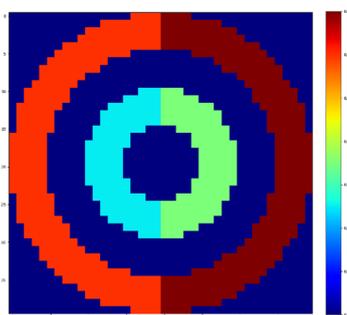


Рис. 5. Заданные волновые параметры

Решим прямую задачу и рассчитаем значения поля в точках (рис. 6).

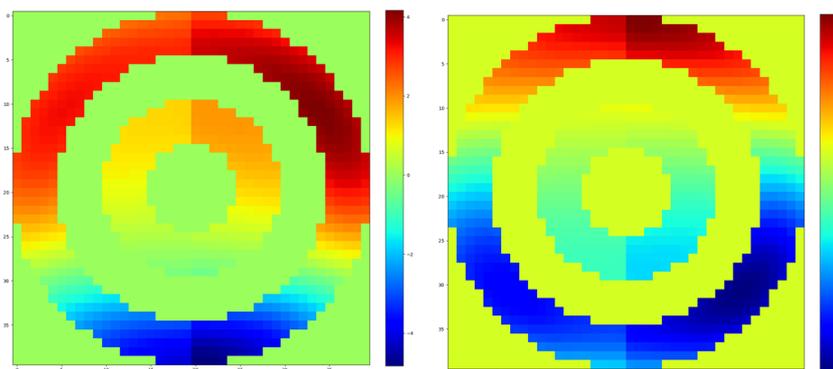


Рис. 6. Действительная и мнимая части решения интегрального уравнения (7)

Далее необходимо отфильтровать значения J , полученные на этапе решения прямой задачи. Приведем пример фильтрации с помощью рассмотренной модели автоэнкодера (рис. 7).

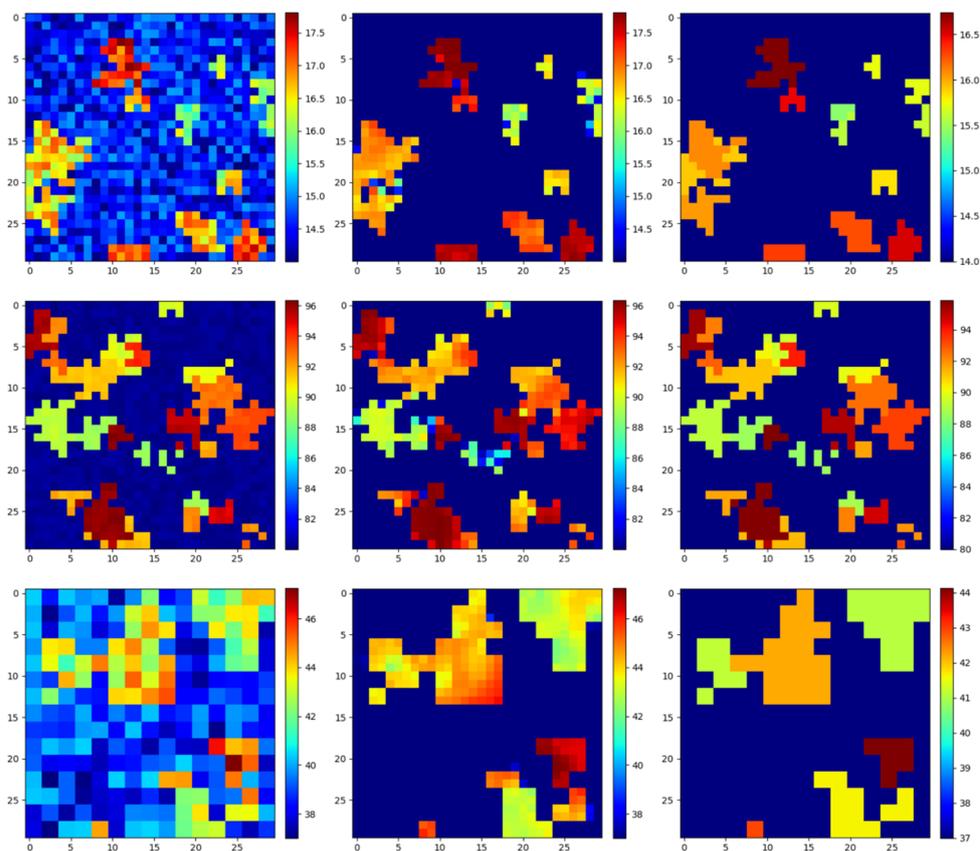


Рис. 7. Данные с шумами (слева), данные без шумов (справа), отфильтрованные данные (по центру)

Далее решается обратная задача, исходя из очищенных значений поля в точках наблюдения.

Результаты и обсуждение

На рис. 8 представлено решение обратной задачи для четырех полуокружностей, каждая из которых имеет свой параметр неоднородности. Как видно из графиков, восстановление значительно улучшается при использовании модели нейронной сети для подавления шума в токе.

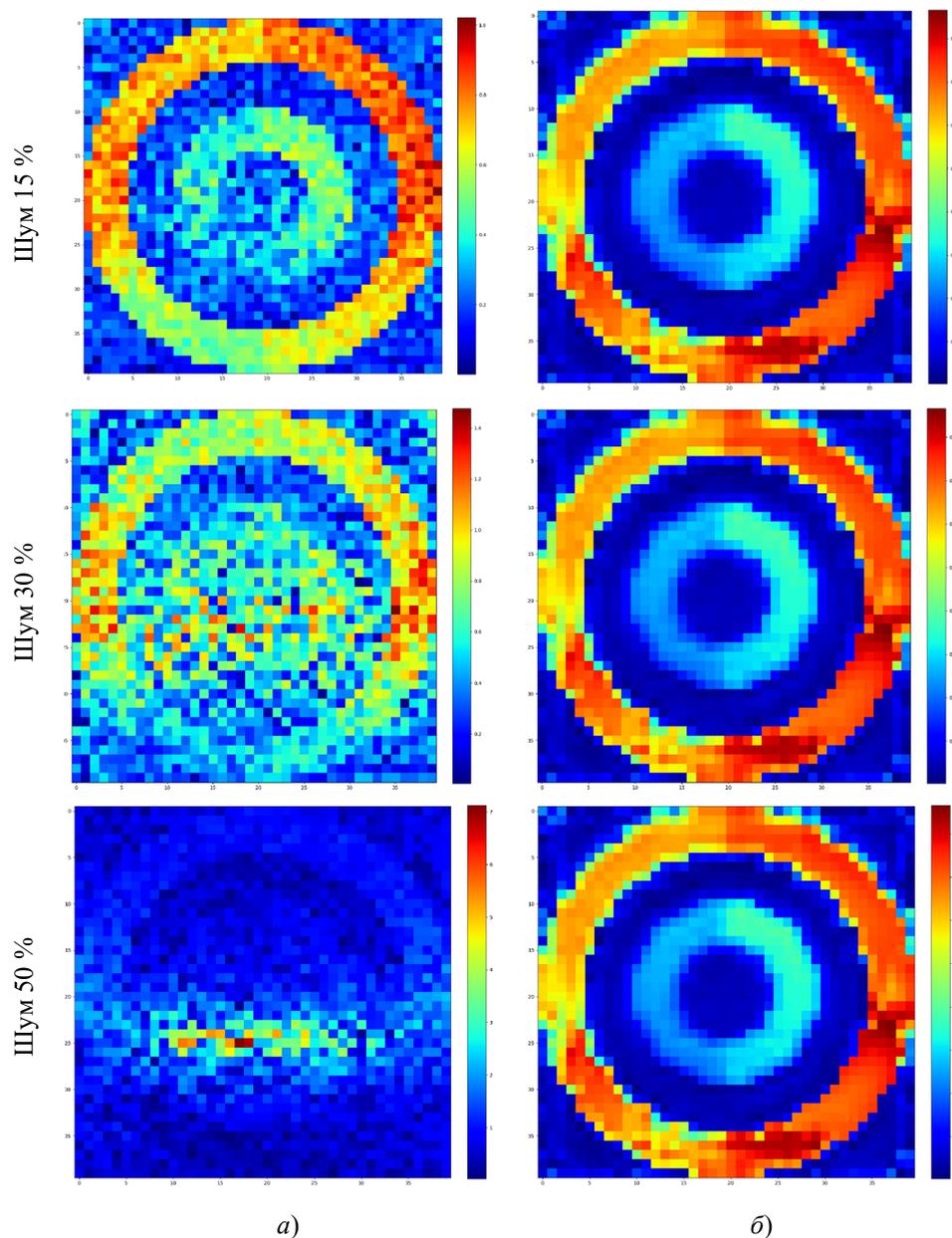


Рис. 8. Восстановленные параметры тела и среды при различных значениях шума: *a* – без фильтрации; *б* – с фильтрацией автоэнкодером

Заключение

Представленный метод позволяет не только определять параметры неоднородности для незашумленных данных, но и восстанавливать данные параметры в случае внесения зашумленных данных. Используя данный подход, удается определить геометрию исходного тела. Рассматриваемые интегральные уравнения были сведены к решению системы алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений проводилось с учетом применения модели нейронной сети в качестве механизма преобуславливания.

Алгоритмы решения прямой и обратной задач реализованы в виде комплекса программ. Комплекс был протестирован на нескольких сериях задач. Анализ полученных численных результатов показал, что метод позволяет восстанавливать волновые параметры и геометрию тела с приемлемой для практики точностью.

Список литературы

1. Дмитриев В. И. Обратные задачи геофизики. М. : МАКС Пресс, 2012. 340 с.
2. Цупак А. А. О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 1. С. 30–38.
3. Медведик М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана-Швингера на телах сложной формы // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 2. С. 175.
4. Кондырев О. В., Медведик М. Ю. Задача восстановления параметров неоднородности двумерного тела по результатам измерений акустического поля // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 11–18.
5. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Yu. The two-step method for determining a piecewisecontinuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28, № 3. С. 427–447.
6. Медведик М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана-Швингера // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 4. С. 82–88.
7. Евстигнеев Р. О., Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Обратная задача восстановления неоднородностей тела для ранней диагностики заболеваний с помощью микроволновой томографии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4. С. 3–17.
8. Дмитриев К. В. Рассеяние акустического поля на рефракционно-плотностных неоднородностях малого волнового размера и решение прямой задачи рассеяния в неоднородной среде // Акустический журнал. 2018. № 64, вып. 2. С. 125–138.
9. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. II: Обратные задачи акустического рассеяния. 2-е изд. М. : Ленанд, 2021. 760 с.
10. Баев А. В. Численное решение обратной задачи рассеяния для уравнения акустики в слоистой среде с поглощением // Прикладная математика и информатика. 2017. Т. 54. С. 57–74.
11. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Communications in Partial Differential Equations. 2019. Vol. 44. P. 1140–1158.

12. Liu R., Yu H., He K., Luo Y. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography // *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2016. Vol. 25. P. 1–22.
13. Xu Y., Yu H., Sushmit A. [et al.]. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data // *Journal of X-Ray Science and Technology*. 2022. Vol. 30. P. 433–445.
14. Davison M. E. A singular value decomposition for the Radon transform in ndimensional Euclidean space // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1981. Vol. 3. P. 321–340.
15. Романов В. Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. № 504. С. 36–41.
16. Буров В. А., Конюшкин А. Л., Румянцева О. Д. Двумерная и трехмерная акустическая томография многомерных рассеивателей при неполных данных // *Акустический журнал*. 1997. № 4. С. 463–469.
17. Boue L. Deep learning for pedestrians: backpropagation in CNNs. 2018.
18. Dumoulin V., Visin F. A guide to convolution arithmetic for deep learning. 2018.
19. Anderson M. R., Basu V., Martin R. D. [et al.]. Performance of a convolutional autoencoder designed to remove electronic noise from p-type point contact germanium detector signals // *The European Physical Journal*. 2022. № 12. P. 82. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-11000-w

References

1. Dmitriev V.I. *Obratnye zadachi geofiziki = Inverse problems of geophysics*. Moscow: MAKS Press, 2012:340. (In Russ.)
2. Tsupak A.A. On the uniqueness of solving the problem of diffraction of an acoustic wave on a system of disjoint screens and inhomogeneous bodies. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2014;(1):30–38. (In Russ.)
3. Medvedik M.Yu. A subierarchical method for solving the Lippmann-Schwinger integral equation on bodies of complex shape. *Radiotekhnika i elektronika = Radio engineering and Electronics*. 2012;57(2):175. (In Russ.)
4. Kondyrev O.V., Medvedik M.Yu. The task of restoring the inhomogeneity parameters of a two-dimensional body based on the results of measurements of the acoustic field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(2):11–18. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Yu. The two-step method for determining a piecewisecontinuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28(3):427–447.
6. Medvedik M.Yu. Subierarchical method of solving the Lippmann-Schwinger integral equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2010;(4):82–88. (In Russ.)
7. Evstigneev R.O., Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The inverse problem of restoring body inhomogeneities for early diagnosis of diseases using microwave tomography. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2017;(4):3–17. (In Russ.)
8. Dmitriev K.V. Acoustic field scattering on refractive density inhomogeneities of small wave size and the solution of the direct scattering problem in an inhomogeneous medium. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic Journal*. 2018;(64):125–138. (In Russ.)

9. Burov V.A., Rumyantseva O.D. *Obratnye volnovye zadachi akusticheskoy tomografii. Ch. II: Obratnye zadachi akusticheskogo rasseyaniya. 2-e izd. = Inverse wave problems of acoustic tomography. Part II: Inverse problems of acoustic scattering. 2nd ed.* Moscow: Lenand, 2021:760. (In Russ.)
10. Baev A.V. Numerical solution of the inverse scattering problem for the acoustics equation in a layered medium with absorption. *Prikladnaya matematika i informatika = Applied Mathematics and computer Science.* 2017;54:57–74. (In Russ.)
11. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Communications in Partial Differential Equations.* 2019;44:1140–1158.
12. Liu R., Yu H., He K., Luo Y. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography. *Journal of X-Ray Science and Technology.* 2016;25:1–22.
13. Xu Y., Yu H., Sushmit A. et al. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data. *Journal of X-Ray Science and Technology.* 2022;30:433–445.
14. Davison M.E. A singular value decomposition for the Radon transform in ndimensional Euclidean space. *Numerical Functional Analysis and Optimization.* 1981;3:321–340.
15. Romanov V.G. Inverse problem for a semilinear wave equation. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya = Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes.* 2022;(504):36–41. (In Russ.)
16. Burov V.A., Konyushkin A.L., Rumyantseva O.D. Two-dimensional and three-dimensional acoustic tomography of multidimensional diffusers with incomplete data. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic Journal.* 1997;(4):463–469. (In Russ.)
17. Boue L. *Deep learning for pedestrians: backpropagation in CNNs.* 2018.
18. Dumoulin V., Visin F. *A guide to convolution arithmetic for deep learning.* 2018.
19. Anderson M.R., Basu V., Martin R.D. et al. Performance of a convolutional autoencoder designed to remove electronic noise from p-type point contact germanium detector signals. *The European Physical Journal.* 2022;(12):82. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-11000-w

Информация об авторах / Information about the authors

Алена Дмитриевна Барышева

студентка кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: allyprofit@gmail.com

Alyona D. Barysheva

Student of the sub-department
of mathematics and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Инна Владимировна Елисеева

студентка кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: innaeliseeva2003@mail.ru

Inna V. Eliseeva

Student of the sub-department
of mathematics and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Валерьевич Медведев

студент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mdl-studio@yandex.ru

Aleksey V. Medvedev

Student of the sub-department
of mathematics and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor
of the sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 16.01.2024

Поступила после рецензирования/Revised 02.03.2024

Принята к публикации/Accepted 04.03.2024