

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ГИБКИХ НИТЕЙ
С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

Д. А. Тарасов, Д. Ю. Семенов

**MATHEMATICAL MODELING OF STRESS-STRAIN STATE
OF FLEXIBLE YARNS WITH CONSIDERATION
OF PHYSICAL NONLINEARITY**

D. A. Tarasov, D. Yu. Semenov

Аннотация. *Актуальность цели.* Объектом исследования являются основные силовые элементы механических систем, выполненные из гибких нитей, работающие по восприятию поперечных нагрузок. Предмет исследования – метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния, одновременно учитывающий геометрическую и физическую нелинейность гибких нитей, что дает возможность исследовать работу конструкций за пределами упругой работы материала. *Материалы и методы.* Предложенный метод основан на теории математического моделирования с использованием аппарата дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, а также положениях сопротивления материалов. *Результаты.* Предложен метод нелинейного расчета напряженно-деформированного состояния гибких нитей с учетом реальных свойств материалов. *Выводы.* Сравнение параметров напряженно-деформированного состояния гибкой нити, полученного с помощью вычислительного эксперимента, с результатами, полученными другим методом расчета, подтвердило адекватность предложенного метода.

Ключевые слова: напряжения, деформации, гибкая нить, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность.

Abstract. *Background.* The object of the study are the main power components of mechanical systems made of flexible threads, working on the perception of lateral loads. Subject of research – the method of mathematical modeling of stress-strain state (VAT) simultaneously takes into account geometric and physical nonlinearity flexible filaments that gives the opportunity to explore work structures beyond elastic behavior of the material. *Materials and methods.* The proposed method is based on the theory of mathematical modeling using the apparatus of differential and integral calculus of functions of one and several variables and positions of strength of materials. *Results.* The proposed method of nonlinear stress-strain state of flexible filaments taking into account the real properties of materials. *Conclusions.* Comparison of parameters of stress-strain state of flexible strands, obtained through computational experiments and also with results obtained by another method of calculation has confirmed the adequacy of the proposed method.

Key words: stress, strain, flexible filament, physical nonlinearity, geometric nonlinearity.

Введение

В инженерной практике широко распространены системы, в которых основными силовыми элементами, обеспечивающими прочность конструкции при внешнем воздействии, являются стальные канаты. К таким системам относятся воздушные линии электрических проводов, контактные провода электрифицированных железных дорог и трамваев, канаты висячих мостов и покрытий большепролетных производственных и общественных зданий, тросы канатных дорог и кабель-кранов и т. п. [1, 2].

В настоящее время определение напряженно-деформированного состояния (НДС) отдельных стальных канатов ведется с использованием известных методик расчета пологих гибких нитей, вошедших в нормативную литературу [3].

Актуальность настоящей работы вытекает из того, что в указанном нормативном документе расчет рассматриваемых элементов ведется без учета неупругих деформаций материала. Однако в последнее время все чаще находят применение синтетические канаты, материал которых подчиняется нелинейному закону деформирования. В связи с этим определение НДС таких элементов необходимо вести в физически нелинейной постановке задачи, так как отсутствует линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Метод математического моделирования НДС гибких нитей

Рассмотрим гибкую нить, расчетная схема которой представлена на рис. 1. При обозначении вертикальных опорных реакций R_A и R_B примем реакцию R_A на более высокой опоре. Условимся все параметры, относящиеся к начальному очертанию, обозначать с индексом «0», а к конечной линии равновесия – с индексом «1» [4].

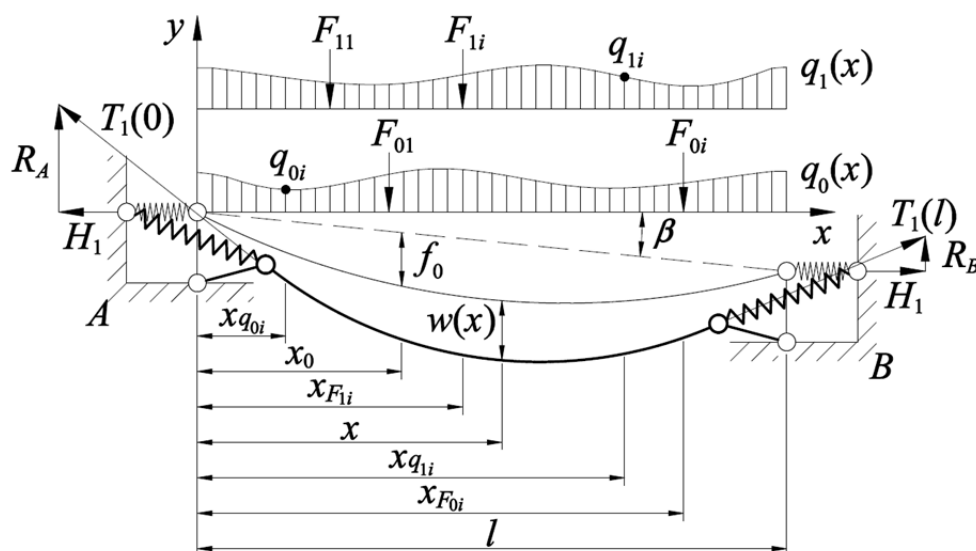


Рис. 1. Расчетная схема гибкой нити:

— — начальное состояние линии равновесия; — — конечное состояние
линии равновесия от внешнего воздействия

При моделировании НДС гибких нитей приняты следующие допущения: материал непрерывно заполняет весь объем (гипотеза сплошности); свойства материала одинаковы во всех точках (однородность) и не зависят от направления (изотропность); поперечные нормальные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза Бернулли); поперечное сечение мало по сравнению с длиной; изменение поперечного сечения при растяжении не учитывается; из внутренних сил возникает лишь осевая сила – натяжения, а жесткость при изгибе и кручении отсутствует [1].

По поводу принятых гипотез следует отметить, что они являются общепринятыми при расчете гибких нитей на внешнее воздействие, и справедливость их подтверждается многолетней практикой эксплуатации конструкций и проведенными натурными и модельными экспериментами [1].

При определении деформированного состояния гибкой нити используются правила построения эпюры изгибающих моментов для балки. Линия равновесия под действием вертикальной нагрузки совпадает с эпюрой изгибающих моментов шарнирно опертой балки тем же пролетом, находящейся под действием той же нагрузки; при этом ординаты эпюры моментов уменьшены делением на величину распора и отложены от хорды AB , соединяющей точки крепления. Математически это записывается так [4, 5]:

$$y_0(x) = \frac{M_0(R_{0A}, R_{0B}, x)}{H_0} + x \operatorname{tg} \beta; \quad (1)$$

$$y_1(x) = \frac{M_1(R_{1A}, R_{1B}, x)}{H_1} + x \operatorname{tg} \beta, \quad (2)$$

где $M_0(R_{0A}, R_{0B}, x)$, $M_1(R_{1A}, R_{1B}, x)$ – функции изгибающего момента в шарнирно опертой балке пролетом l от действия начальной нагрузки и совместного действия начальной и дополнительной нагрузки, $H \cdot m$; H_0 , H_1 – распор, вызванный начальной нагрузкой и совместным действием начальной и дополнительной нагрузки, H ; x – текущая абсцисса ($0 \leq x \leq l$), m ; β – угол наклона хорды AB , град.

Распор является горизонтальной составляющей опорных реакций в точках крепления и равен по величине горизонтальной составляющей продольных усилий во всех сечениях гибкой нити [6].

Из выражений (1) и (2) видно, что построение линии равновесия сводится к определению распора, так как определение функции изгибающего момента в шарнирно опертой однопролетной балке не вызывает трудностей.

При определении внутренних усилий в однопролетной балке пролетом l поперечная сила равна сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения; изгибающий момент равен сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно центра тяжести сечения [4]. Математически внутренние усилия при изгибе можно записать следующим образом:

– при действии нагрузки, вызывающей начальное очертание:

$$Q_0(R_{0A}, R_{0B}, x) = R_{0A} \cdot (x \geq 0) + R_{0B} \cdot (x \geq l) + \sum_{i=1}^{\operatorname{rows}(F_0)} [F_{0i} \cdot (x \geq x_{F_{0i}})] + \int_0^x q_0(x) dx + \int_0^x q(x) dx; \quad (3)$$

$$M_0(R_{0A}, R_{0B}, x) = R_{0A}x(x \geq 0) + R_{0B}(x-l)(x \geq l) + \sum_{i=1}^{rows(F_0)} [F_{0i}(x - x_{F_{0i}})(x \geq x_{F_{0i}})] + \int_0^x q_0(xx)(x - xx)dx + \int_0^x q(xx)(x - xx)dx; \quad (4)$$

– при совместном действии начальной и дополнительной нагрузки:

$$Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x) = R_{1A}(x \geq 0) + R_{1B}(x \geq l) + \sum_{i=1}^{rows(F_0)} [F_{0i}(x \geq x_{F_{0i}})] + \sum_{i=1}^{rows(F_1)} [F_{1i}(x \geq x_{F_{1i}})] + \int_0^x q_0(x)dx + \int_0^x q_1(x)dx + \int_0^x q(x)dx; \quad (5)$$

$$M_1(R_{1A}, R_{1B}, x) = R_{1A}x(x \geq 0) + R_{1B}(x-l)(x \geq l) + \sum_{i=1}^{rows(F_0)} [F_{0i}(x - x_{F_{0i}})(x \geq x_{F_{0i}})] + \sum_{i=1}^{rows(F_1)} [F_{1i}(x - x_{F_{1i}})(x \geq x_{F_{1i}})] + \int_0^x q_0(xx)(x - xx)dx + \int_0^x q_1(xx)(x - xx)dx + \int_0^x q(xx)(x - xx)dx, \quad (6)$$

где R_{0A} , R_{0B} , R_{1A} , R_{1B} – опорные реакции при действии начальной нагрузки и совместном действии начальной и дополнительной нагрузки, Н; F_{0i} , F_{1i} – сосредоточенные начальные и дополнительные нагрузки, Н; $x_{F_{0i}}$, $x_{F_{1i}}$ – абсциссы точек приложения сосредоточенных начальных и дополнительных нагрузок, м; $q_0(x)$, $q_1(x)$ – функция распределенной начальной и дополнительной нагрузки, Н/м; $q(x)$ – функция равномерно-распределенной нагрузки от собственного веса, Н/м.

Функция равномерно-распределенной нагрузки от собственного веса постоянна при всех значениях абсцисс и равна

$$q(x) = \rho A, \quad (7)$$

где ρ – объемный вес материала, Н/м³; A – площадь поперечного сечения, м².

Распределенная нагрузка задается массивом точек контура для последующей линейной интерполяции функции. Предполагается, что координаты функции нагрузки от деформации гибкой нити не зависят.

В уравнения для поперечных сил и изгибающих моментов включены слагаемые от опорных реакций. Поскольку они не известны до момента определения внутренних усилий, их следует включать в параметры функций.

Определяются опорные реакции из условия равновесия балки:

– при действии нагрузки, вызывающей начальное очертание:

$$R_{0A} + R_{0B} + \sum_{i=1}^{rows(F_0)} F_{0i} + \int_0^l q_0(x)dx + \int_0^l q(x)dx = 0; \quad (8)$$

$$M_0(R_{0A}, R_{0B}, l) = 0; \quad (9)$$

– при совместном действии начальной и дополнительной нагрузки:

$$R_{1A} + R_{1B} + \sum_{i=1}^{rows(F_0)} F_{0i} + \sum_{i=1}^{rows(F_1)} F_{1i} + \int_0^l q_0(x)dx + \int_0^l q_1(x)dx + \int_0^l q(x)dx = 0; \quad (10)$$

$$M_1(R_{1A}, R_{1B}, l) = 0, \quad (11)$$

где l – пролет, м.

Для определения распора в точках крепления воспользуемся уравнением неразрывности деформаций [1]. Поскольку распор не известен до момента его определения, а он входит в уравнения для расчета начальной и конечной длины гибкой нити, все последующие выражения запишем в виде функций от распора:

$$L_0 + \Delta L(H_1) + \Delta L_t = L_1(H_1), \quad (12)$$

где L_0 – начальная длина, м; $\Delta L(H_1)$ – упругая деформация, м; ΔL_t – температурная деформация, м; $L_1(H_1)$ – конечная длина, м.

В работах [7–9] получены выражения по определению всех членов уравнения неразрывности деформаций, однако определить удлинение гибкой нити при учете физической нелинейности материала по формуле, основанной на законе Гука, уже нельзя:

$$\Delta L(H_1) = \frac{H_1 - H_0}{EA} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x)}{H_1} + \operatorname{tg} \beta \right)^2 \right] dx, \quad (13)$$

где H_0, H_1 – распор, вызванный начальной нагрузкой и совместным действием начальной и дополнительной нагрузки, Н; E – модуль упругости материала, Па; A – площадь поперечного сечения, м²; $Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x)$ – функция поперечной силы в шарнирно опертой балке пролетом l от совместного действия начальной и дополнительной нагрузки, Н; x – текущая абсцисса ($0 \leq x \leq l$), м; β – угол наклона хорды AB , град.

Учет физической нелинейности материала при моделировании НДС гибких нитей

Для определения удлинения гибкой нити необходимо по диаграмме деформирования, зная напряжения, найти относительную деформацию, а по ней определить искомое удлинение.

В качестве расчетных диаграмм состояния материала, определяющих связь между напряжениями и относительными деформациями, могут выступать любые виды диаграмм, например, такие как криволинейные или кусочно-линейные, но самое главное, отвечающие истинному поведению материала. При этом должны быть указаны основные параметрические точки диаграммы, каковыми являются максимальные напряжения и соответствующие относительные деформации, граничные значения и т.п.

В качестве рабочей диаграммы состояния материала, определяющей связь между напряжениями и относительными деформациями, примем кусочно-линейную диаграмму деформирования, представленную на рис. 2, так как с ее помощью можно аппроксимировать любую кривую.

При такой диаграмме растягивающие напряжения в зависимости от относительных деформаций удлинения материала определяются по формуле

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_1; \\ \sigma_1 + E_1(\varepsilon - \varepsilon_1) & \text{при } \varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_2; \\ \dots\dots\dots \\ \sigma_n + E_n(\varepsilon - \varepsilon_n) & \text{при } \varepsilon_n \leq \varepsilon < \varepsilon_{n+1}, \end{cases} \quad (14)$$

где E_n – модуль упрочнения материала на n -м сегменте диаграммы деформирования, Па.

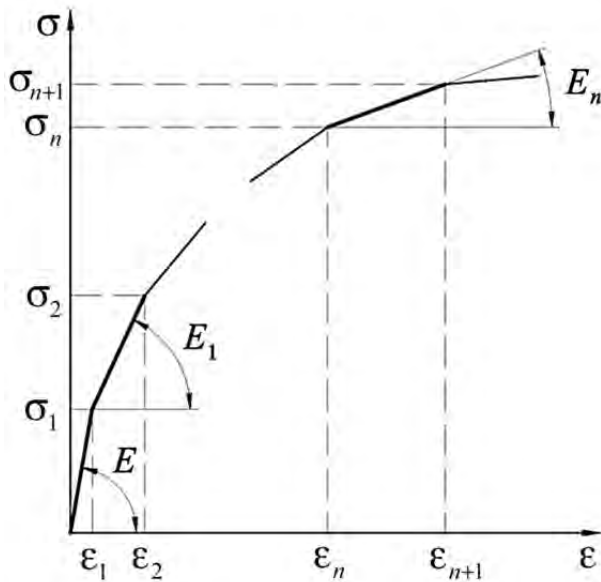


Рис. 2. Диаграмма деформирования

Модуль упрочнения материала на n -м сегменте диаграммы деформирования можно определить из уравнения

$$E_n = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}. \quad (15)$$

Для нахождения напряжений умножим обе части выражения (13) на величину $\frac{E}{L_0}$:

$$\frac{\Delta L(H_1)E}{L_0} = \frac{(H_1 - H_0)E}{EAL_0} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x)}{H_1} + \text{tg}\beta \right)^2 \right] dx. \quad (16)$$

После сокращения и преобразования получим:

$$\sigma(H_1) = \frac{H_1 - H_0}{AL_0} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x)}{H_1} + \text{tg}\beta \right)^2 \right] dx. \quad (17)$$

В параметры функции напряжений введен распор, вызванный совместным действием начальной и дополнительной нагрузки, так как он не известен на момент определения напряжений.

Зная напряжения и то, что относительная деформация равна $\varepsilon = \frac{\Delta L(H_1)}{L_0}$, найдем из выражения (14) удлинение гибкой нити:

$$\Delta L(H_1) = \begin{cases} \frac{\sigma(H_1)L_0}{E} & \text{при } \sigma(H_1) < \sigma_1; \\ L_0 \left(\frac{\sigma(H_1) - \sigma_1}{E_1} + \varepsilon_1 \right) & \text{при } \sigma_1 \leq \sigma(H_1) < \sigma_2; \\ \dots\dots\dots \\ L_0 \left(\frac{\sigma(H_1) - \sigma_n}{E_n} + \varepsilon_n \right) & \text{при } \sigma_n \leq \sigma(H_1) < \sigma_{n+1}, \end{cases} \quad (18)$$

После определения удлинения, вызванного изменением внешнего воздействия, а также нахождения начальной и конечной длины гибкой нити по формулам, представленным в работах [1, 3, 4], появляется возможность, используя численные методы, решить нелинейное уравнение (12) и найти значение распора.

После нахождения распора появляется возможность определить продольное усилие, возникающее в поперечных сечениях по длине гибкой нити.

Функция продольного усилия равна [3, 4]

$$T_1(x) = \sqrt{H_1^2 + (Q_1(R_{1A}, R_{1B}, x) + H_1 \operatorname{tg} \beta)^2}. \quad (19)$$

Различные, но статически эквивалентные локальные нагрузки приводят к возникновению в гибкой нити одного и того же напряженного состояния, если не учитывать местные напряжения вблизи точки приложения нагрузки. Этим состоянием является линейное (одноосное) напряженное состояние. Известно, что при простом растяжении (а гибкие нити могут воспринимать только растягивающие усилия) во всех сечениях, параллельных оси рассматриваемого элемента, нормальные и касательные напряжения равны нулю. Таким образом, при простом растяжении в каждой точке гибкой нити главные площадки перпендикулярны и параллельны ее оси, а главные напряжения на них соответственно равны [1]

$$\sigma_1(x) = \frac{T_1(x)}{A}; \quad \sigma_2(x) = \sigma_3(x) = 0. \quad (20)$$

Проверка адекватности предложенного метода

В качестве оценки адекватности разработанного метода математического моделирования проведем сравнительный анализ НДС гибкой нити, полученного разными методами расчета. Для этого рассмотрим предложенный метод и метод конечных элементов (МКЭ) на примере задачи, расчетная схема которой представлена на рис. 3.

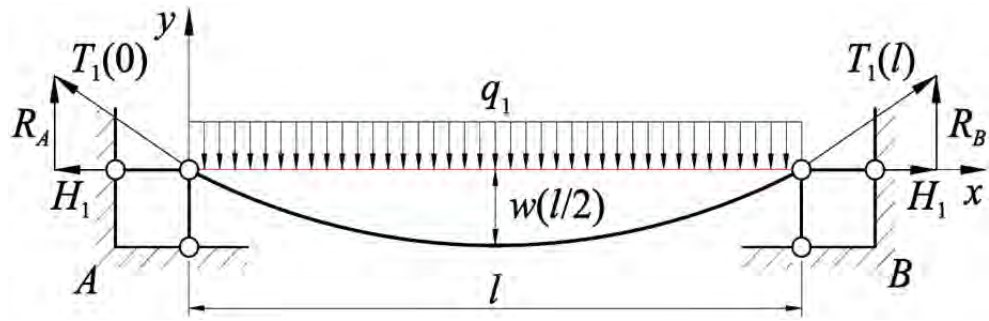


Рис. 3. Расчетная схема гибкой нити:
 — начальное состояние линии равновесия; — конечное состояние
 линии равновесия от внешнего воздействия

Гибкая нить с опорами, расположенными на одном уровне пролетом $l = 6$ м, сечением $A = 0,00031416$ м² нагружена равномерно-распределенной нагрузкой по всему пролету. Первоначальная стрела провеса и нагрузка, вызывающая начальное очертание, отсутствуют. Учет физически нелинейного поведения материала моделируется кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями. Параметры закона нелинейного деформирования, представленного на рис. 4, выражены в напряжениях $\sigma_1 = 300$ МПа, $\sigma_2 = 500$ МПа, $\sigma_3 = 700$ МПа и соответствующих относительных деформациях $\epsilon_1 = 0,00204$, $\epsilon_2 = 0,02$, $\epsilon_3 = 0,03$.

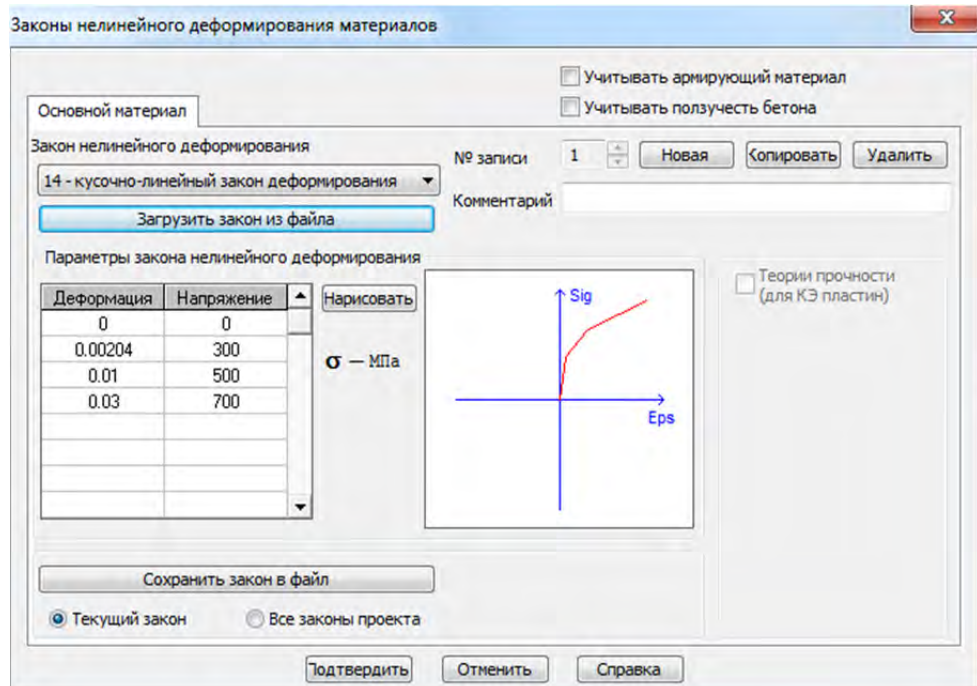


Рис. 4. Закон нелинейного деформирования материала

Примем за основные критерии сравнения при определении НДС гибкой нити максимальное продольное усилие, возникающее в сечениях, расположенных на опорах, и прогиб в середине пролета.

Для этого решим ряд задач, последовательно приравнивая равномерно-распределенную нагрузку q_1 к значениям в 3, 9 и 20 кН/м для получения напряжений на каждом сегменте заданной диаграммы деформирования.

Расчет МКЭ выполнен в программном комплексе «ЛИРА-САПР» версия 2015 релиз R4. Конструкция моделировалась универсальными пространственными стержневыми конечными элементами с учетом физической и геометрической нелинейности (тип 410), разбивка производилась на 100 конечных элементов. Расчет велся шаговым нелинейным процессором, предназначенным для решения физически и геометрически нелинейных, а также контактных задач. На каждом шаге матрица жесткости формировалась в системе координат «нового положения» с учетом изменения касательного модуля деформации.

В качестве примера на рис. 5 и 6 представлены результаты моделирования НДС гибкой нити, нагруженной равномерно-распределенной нагрузкой $q_1 = 3$ кН/м.

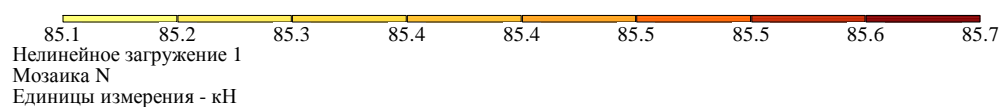


Рис. 5. Эпюра продольных усилий

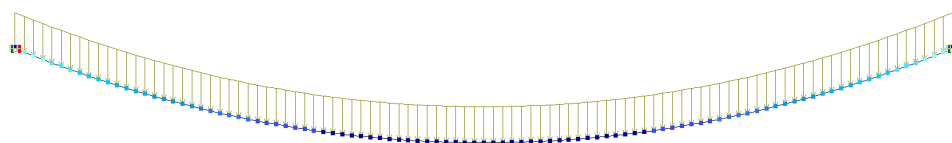
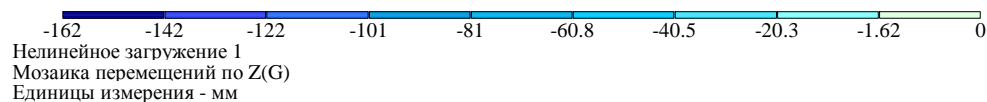


Рис. 6. Эпюра перемещений

В результате математического моделирования НДС предложенным методом для ряда значений равномерно-распределенной нагрузки, действующей на гибкую нить с заданными физическими и геометрическими параметрами, получены соответствующие значения максимального продольного усилия $T_1(0) = T_1(l)$ и прогиба в середине пролета $w(l/2)$.

В табл. 1 представлены данные, рассчитанные с помощью МКЭ и разработанного метода моделирования.

Таблица 1

Сопоставление результатов расчетов

Критерий оценки	Метод расчета	Равномерно-распределенная нагрузка, кН/м		
		3	9	20
Продольное усилие в точках подвеса $T_1(0)$, $T_1(l)$, кН	Предложенный метод	85,8	134,3	187,9
	МКЭ	85,7	136	185
	Погрешность, %	0,12	1,25	1,54
Прогиб в середине пролета $w(l/2)$, м	Предложенный метод	0,158	0,308	0,507
	МКЭ	0,162	0,307	0,517
	Погрешность, %	2,47	0,32	1,93

Заключение

Анализ параметров НДС гибкой нити, полученных с помощью предложенного метода математического моделирования, засвидетельствовал достаточно высокую согласованность с результатами расчета в программном комплексе «ЛИРА-САПР», реализующего МКЭ.

Расхождения значений параметров НДС, взятых за основные критерии сравнения на всех участках принятой диаграммы деформирования, составили не более 5 %, что подтверждает адекватность разработанного метода и принятых допущений при моделировании.

Представленный метод определения напряженно-деформированного состояния гибких нитей с учетом физической нелинейности позволяет решать задачи с учетом реальных свойств материалов, не подчиняющихся закону Гука, что характерно для механических систем с основными силовыми элементами, выполненными из синтетических канатов.

Библиографический список

1. Тарасов, Д. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стальных канатов при действии поперечных статических и ударных нагрузок : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / Тарасов Д. А. – Пенза, 2016. – 146 с.
2. Тарасов, Д. А. Конструкция защитного сооружения от удара для железнодорожных переездов / Д. А. Тарасов, В. В. Коновалов, В. Ю. Зайцев // Региональная архитектура и строительство. – 2014. – № 1 (18). – С. 111–117.
3. Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81* «Стальные конструкции») / ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР. – М. : ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 148 с.
4. Тарасов, Д. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стальных канатов / Д. А. Тарасов, В. В. Коновалов, В. Ю. Зайцев // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2013. – № 4 (73). – С. 215–221.
5. Тарасов, Д. А. Комплекс программ моделирования напряженно-деформированного состояния стальных канатов / Д. А. Тарасов // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2013. – № 12 (16). – С. 114–120.

6. Тарасов, Д. А. Компьютерное моделирование определения реакций опор гибких барьеров / В. В. Коновалов, Д. А. Тарасов, В. Ю. Зайцев, Н. В. Байкин // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. – 2012. – № 3. – С. 72–79.
7. Тарасов, Д. А. Комплекс программ моделирования работы стальных канатов при действии поперечной динамической нагрузки / Д. А. Тарасов // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. – № 2 (24). – С. 48–55.
8. Тарасов, Д. А. Параметрическая оптимизация стальных канатов при действии поперечного удара / Д. А. Тарасов // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. – № 2 (24). – С. 56–62.
9. Тарасов, Д. А. Математическое моделирование оптимизации параметров несущих элементов, выполненных из стальных канатов / Д. А. Тарасов, В. В. Коновалов, В. Ю. Зайцев // Интеграл. – 2012. – № 6. – С. 118–120.

Тарасов Денис Александрович

кандидат технических наук,
начальник отдела инженерного анализа
конструкций и защиты интеллектуальной
собственности,
ЗАО «ЦеСИС НИКИРЭТ» (г. Пенза)
E-mail: den517375@ya.ru

Tarasov Denis Alexandrovich

candidate of technical sciences,
head of department of engineering analysis
of structures and protection
of intellectual property,
Closed Joint-stock company
«Center of special engineering constructions
of research and design Institute
of radio electronic technology»

Семенов Дмитрий Юрьевич

магистр, инженер-конструктор отдела
приводной и специальной техники,
ЗАО «ЦеСИС НИКИРЭТ» (г. Пенза)
E-mail: kb@cesis.ru

Semenov Dmitry Yuryevich

master, engineer-designer of department
of driving and special equipment,
Closed Joint-stock company
«Center of special engineering constructions
of research and design Institute
of radio electronic technology»

УДК 624.071.22:531.011

Тарасов, Д. А.

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния гибких нитей с учетом физической нелинейности / Д. А. Тарасов, Д. Ю. Семенов // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2017. – № 3 (23). – С. 175–185.