

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКИХ ОБЪЕКТАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПОЛЯ

А. О. Лапич

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
lapich.a@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – решение обратной задачи дифракции на плоских объектах. *Материалы и методы.* Исходная задача сводится к решению интегрального уравнения. Данное уравнение будет решаться численным методом. Был использован современный двухшаговый подход при решении обратной задачи. Для моделирования нелинейного процесса применены различные виды функций нелинейности поля. *Результаты.* Представлены графические изображения, иллюстрирующие значение диэлектрической проницаемости внутри тела для исходной задачи и восстановленных значений. Показаны графики сходимости итерационного процесса моделирования нелинейного поля. Приведено сравнение результатов для различных значений параметров. *Выводы.* Предложен и реализован численный метод решения задачи, получены сравнительные результаты.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное уравнение, краевая задача, численный метод, двухшаговый метод, нелинейность Керра, нелинейность с насыщением, метод Галеркина

Для цитирования: Лапич А. О. Решение прямой и обратной задач дифракции на плоских объектах с различными видами нелинейности поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2024. № 3. С. 138–146. doi: 10.21685/2227-8486-2024-3-12

SOLVING THE DIRECT AND INVERSE DIFFRACTION PROBLEMS ON FLAT OBJECTS WITH DIFFERENT TYPES OF FIELD NONLINEARITY

A.O. Lapich

Penza State University, Penza, Russia
lapich.a@yandex.ru

Abstract. *Background.* The aim of the work is to solve the inverse problem of diffraction on flat objects. *Materials and methods.* The initial problem is reduced to solving an integral equation. This equation will be solved numerically. When solving the inverse problem, an up-to-date two-step method is used. Various types of field nonlinearity are used to simulate a nonlinear process. *Results.* Graphical images illustrating the value of the dielectric constant inside the body for the initial problem and the reconstructed values are presented. Graphs of convergence of the iterative process of injection of a nonlinear field are shown. The results are compared for different parameter values. *Conclusions.* A numerical method for solving the problem is proposed and implemented, and comparative results are obtained.

Keywords: inverse problem, integral equation, boundary value problem, numerical method, two-step method, Kerr nonlinearity, saturation nonlinearity, Galerkin method

For citation: Lapich A.O. Solving the direct and inverse diffraction problems on flat objects with different types of field nonlinearity. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2024;(3):138–146. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2024-3-12

Введение

Обратные задачи дифракции представляют собой важную и довольно обширную область научных исследований в оптике, физике, электродинамике и технике. Они включают в себя восстановление параметров объектов по рассеянному излучению. Подобные подходы актуальны для решения задач, связанных с формированием результатов измерения параметров, которые невозможно получить без влияния на целостность объекта. За последние 10–15 лет решения схожих задач многие выводы и утверждения были получены в работах [1–6]. Они имеют широкий спектр применения в различных областях: от медицинской диагностики до получения радиолокационных изображений. Многие вопросы таких задач уже были рассмотрены, получены фундаментальные результаты [7]. Однако решение обратных задач при нелинейной структуре является слабо изученным в литературе, многие вопросы требуют анализа и дальнейшего решения.

Иногда для решения дифракционных задач удобно использовать двумерные модели как подобие слоя трехмерной фигуры. Такой подход позволяет повысить скорость вычисления и не требует высоких вычислительных мощностей. Это позволяет более точно настроить алгоритм работы программного аппарата. В то же время такую задачу можно без особых трудностей переписать и для трехмерного случая.

Постановка задачи

Пусть дан некоторый объект, расположенный в двумерной области. Предполагается, что объект может иметь как линейную, так и нелинейную зависимость от поля u . Задача описывается через неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем; $k^2(x)$ – непрерывная вещественная функция.

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

а также необходимо учесть условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 u + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Прямоугольный объект Q расположен в двумерном пространстве. Заметим, что объект может иметь произвольную конфигурацию. Для этого можно применять, к примеру, субиерархический метод [8]. С его помощью можно «вырезать» объекты без дополнительного пересчета матрицы. Вне объекта волновое число $k_0 = \text{const}$; $k(x)$ – функция, характеризующая волновое число внутри тела; u – поле, исходящее от точечного источника и его направление. Точками обозначены положения точек наблюдения. Более подробную постановку, доказательство единственности задачи (1)–(3) можно посмотреть в работах [9, 10].

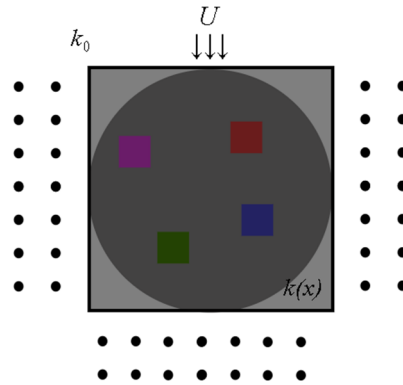


Рис. 1. Визуализация задачи

Представим уравнение в виде (1):

$$\Delta u + k_0^2 u = (k_0^2 - k^2(x))u + f(x). \quad (4)$$

Задача (1)–(4) сводится к интегральному уравнению вида

$$u(x) = f^0(x) + k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy \quad (5)$$

в случае, когда $k(x) = \text{const}$ или

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает неоднородный случай и содержит волновую функцию $k(x)$.

Нелинейный случай

В данном пункте будут рассмотрены некоторые возможные функции задания нелинейности [11]. Рассмотрим нелинейность, заданную по следующему закону:

$$k^2(x) = k_1^2 + k_0 \alpha |u(x)|^2. \quad (7)$$

Данный эффект заключается в изменении свойств изотропных материалов при воздействии поля. При интенсивном воздействии в реальных средах происходит явление насыщения, характеризующееся ограничением роста эффекта. Насыщение можно моделировать с помощью следующей функции:

$$k^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u(x)|^2}{1 + \beta |u(x)|}, \quad (8)$$

где β является некоторым коэффициентом нелинейности. Формула (8) является обобщением (7) при $\beta \rightarrow 0$.

В нелинейных задачах также довольно часто применяется нелинейность экспоненциального типа, которая записывается в виде

$$k^2(x) = 1 - e^{-\beta |u(x)|^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим один из возможных методов задания нелинейности поля. Данный алгоритм заключается в построении явного итерационного процесса, который можно представить по шагам [12].

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k^2(y; u(y)) - k_0^2) u(y) dy, \quad (10)$$

где волновая функция зависит от $u(x)$. Уравнение (10) описывает процесс дифракции волны внутри Q . Так как будет использован явный алгоритм, на первом шаге решим линейное объемное интегральное уравнение (10) для задания начального приближения и тем самым определим значение $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитываем значения волновой функции по одной из формул задания нелинейности (7)–(9). Последним шагом является пересчет и нахождение решения на новом шаге с использованием следующей формулы:

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_{n+1}^2(y; u_n(y)) - k_0^2) u_n(y) dy.$$

Процесс повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность.

Двухшаговый метод решения обратной задачи на плоском объекте

Далее мы приступаем к процедуре обнаружения неоднородностей внутри объекта. Для этой цели мы применяем двухшаговый алгоритм [10, 13], который хорошо зарекомендовал себя в решении подобных задач. Первым действием является определение значения поля $U(x)$ по следующей формуле:

$$U(x) = (k_0^2 - k^2(x)) u(x).$$

Далее решаем уравнение относительно поля $U(x)$:

$$u_{\text{merg}}(x_{ob}) - u^0(x_{ob}) = k_0^2 \int_Q G_E(x_{ob}, y) U(y) dy, \quad x_{ob} \notin Q, \quad (11)$$

где $u_{\text{merg}}(x_{ob})$ является моделируемым полем в точках x_{ob} .

Из уравнения (11) находим $U(x)$ и определяем волновую функцию тела $k(x)$ в каждой ячейке, используя формулу пересчета:

$$(k_0^2 - k^2(x)) = \frac{U(x)}{u^0(x) + \left(\int_Q G_E(x, y) U(y) dy \right)}, x \in Q. \quad (12)$$

В связи с тем, что уравнение (12) является уравнением первого рода, полученная в ходе вычисления матрица является плохо обусловленной. Для снижения числа обусловленности матрицы будет применен метод объединенных расчетных сеток [9].

Численные результаты

Приведем результаты решения прямой и обратной задач при различных параметрах нелинейности. В качестве начальных данных при расчетах были выбраны следующие значения: размеры области объекта $a = 0,15$ м, $b = 0,15$ м, общее количество ячеек с применением объединенных расчетных сеток $N = 12\,500$. Источник излучения расположен сверху объекта на расстоянии длины одной из его сторон. Неоднородность представляет собой эллипс, расположенный внутри прямоугольной области. На рис. 2, 3, 5, 7 представлено решение задачи при задании различных значений коэффициентов нелинейности α и β , где слева показаны значения поля, а справа значения волновой функции после решения обратной задачи.

На рис. 2 представлен линейный случай при $\alpha = 0, \beta = 0$. На рис. 3 описывается решение при параметре нелинейности $\alpha = 0,01$. На рис. 5 продемонстрировано решение задачи, когда параметр нелинейности β значительно превосходит параметр α , а именно $\alpha = 0,1, \beta = 0,5$. На рис. 7 показано решение при параметрах $\alpha = 0,001, \beta = 0,1$.

В левой части представлены значения поля, справа – значения волновой функции после решения обратной задачи. На рис. 4, 6, 8 указаны графики сходимости итерационного процесса (разница между текущим и предыдущим шагом итерации).

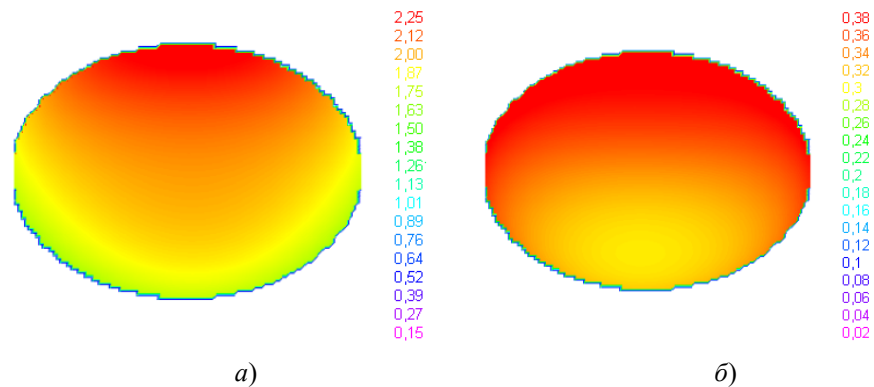


Рис. 2. Решение задачи при линейном случае ($\alpha = \beta = 0$):
а – значения поля $u(x)$; б – значения волновой функции $k(x)$
после решения обратной задачи

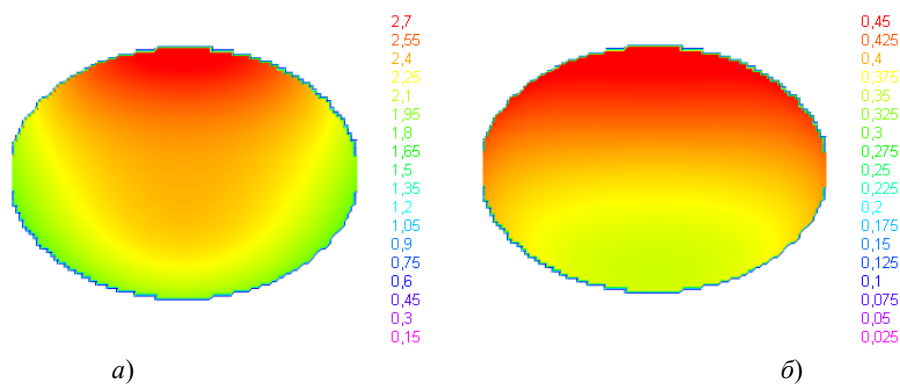


Рис. 3. Решение задач при нелинейности (7):
 a – значения поля $u(x)$; b – значения волновой функции $k(x)$
 после решения обратной задачи

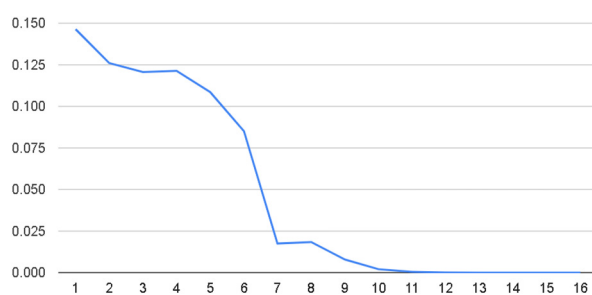


Рис. 4. График сходимости итерационного процесса с нелинейностью (7)

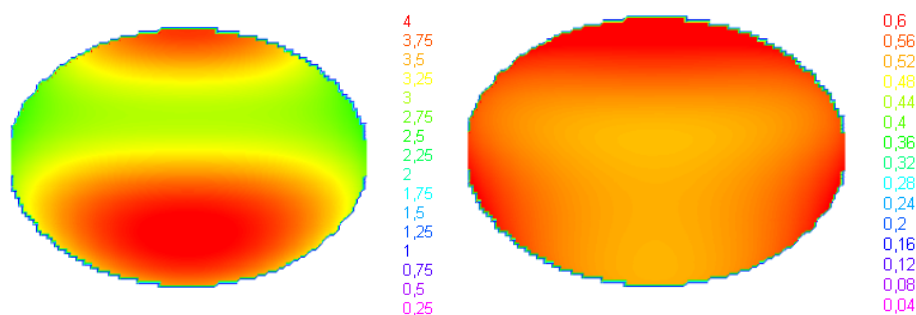


Рис. 5. Решение задачи при нелинейности (8), где $\alpha < \beta$:
 a – значения поля $u(x)$; b – значения волновой функции $k(x)$
 после решения обратной задачи

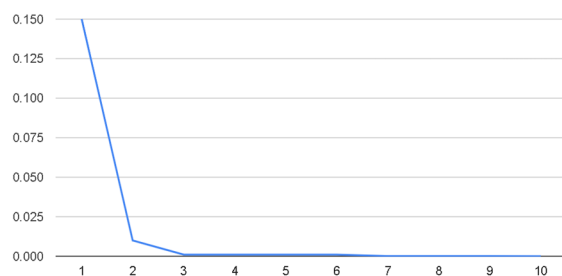


Рис. 6. График сходимости итерационного процесса с нелинейностью (8), где $\alpha < \beta$

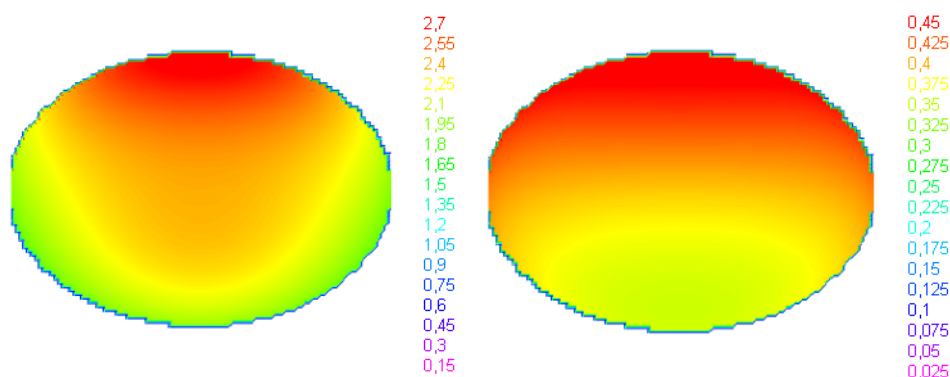


Рис. 7. Решение задач при нелинейности (8), где $\alpha > \beta$

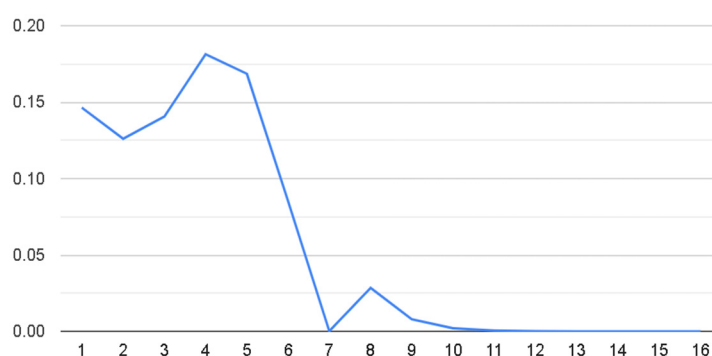


Рис. 8. График сходимости итерационного процесса задания нелинейности (8), где $\alpha > \beta$

Заключение

В работе описан метод решения двумерной нелинейной задачи дифракции для объектов, имеющих как линейную, так и нелинейную структуру. Представлен итерационный метод задания нелинейности, который может быть применен ко всем вышеописанным законам. Представленные графики решения обратной задачи показывают схожие результаты с требуемой точностью, что говорит о возможности применения такого подхода в подобных задачах. Были получены графики сходимости итерационного процесса для каждого вида нелинейности при моделировании нелинейного поля. В созданной модели допустимо задавать более мелкие неоднородности, которые возможно восстановить при решении обратной задачи. Стоит отметить, что результаты задачи носят модельный характер, который впоследствии возможно применять в более сложных задачах, например трехмерных. Значения параметров нелинейности выбраны на основании результатов подобных задач.

Список литературы

1. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М. : Научн. мир, 2005. 296 с.
2. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
3. Горюнов А. Л., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М. : Изд-во МГУ, 1989. 152 с.

4. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 3. С. 469–482.
5. Буров В. А., Вечерин С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 516–536.
6. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2. Обратные задачи акустического рассеяния. М. : УРСС, 2019. 760 с.
7. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М. : Русайнс, 2016. 223 с.
8. Медведик М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 4. С. 82–88.
9. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 166–176.
10. Smirnov Y. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28. P. 1474–1492.
11. Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны. М. : Физматлит, 2003. 304 с.
12. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана – Швингера методом Галеркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 66–73.
13. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2023. № 4. С. 142–153.

References

1. Romanov V.G. *Ustoychivost' v obratnykh zadachakh = Stability in inverse problems*. Moscow: Nauchn. mir, 2005:296. (In Russ.)
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi = Inverse and incorrect problems*. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009:457. (In Russ.)
3. Goryunov A.L., Saskovets A.V. *Obratnye zadachi rasseyaniya v akustike = Inverse scattering problems in acoustics*. Moscow: Izd-vo MGU, 1989:152. (In Russ.)
4. Alekseenko N.V., Burov V.A., Rumyantseva O.D. Solution of the three-dimensional inverse problem of acoustic scattering. The modified Novikov algorithm. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic magazine*. 2008;54(3):469–482. (In Russ.)
5. Burov V.A., Vecherin S.N., Morozov S.A., Rumyantseva O.D. Modeling of the exact solution of the inverse problem of acoustic scattering by functional methods. *Akusticheskii zhurnal = Acoustic magazine*. 2010;56(4):516–536. (In Russ.)
6. Burov V.A., Rumyantseva O.D. *Obratnye volnovye zadachi akusticheskoy tomografii. Ch. 2. Obratnye zadachi akusticheskogo rasseyaniya = Inverse wave problems of acoustic tomography. Part 2. Inverse problems of acoustic scattering*. Moscow: URSS, 2019:760. (In Russ.)
7. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel = Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies*. Moscow: Rusayns, 2016:223. (In Russ.)
8. Medvedik M.Yu. Subierarchical method of solving the Lippmann–Schwinger integral equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-*

- matematicheskie nauki* = *Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2010;(4):82–88. (In Russ.)
9. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem on objects of arbitrary shape. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki* = *Scientific notes of the Kazan University. Ser. Physical and mathematical sciences*. 2023;165(Bk.2):166–176. (In Russ.)
 10. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28:1474–1492.
 11. Akhmediev N.N., Ankevich A. Solitony. Moscow: Fizmatlit, 2003:304.
 12. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. n iterative scheme for solving a nonlinear integral equation of the Lippman-Schwinger type by the Galerkin method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *Proceedings of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):66–73. (In Russ.)
 13. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. A method for restoring the parameters of inhomogeneities of a body based on the results of measurements of an electromagnetic field. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2023;(4):142–153. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Олегович Лапич

ассистент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Andrey O. Lapich

Assistant of the sub-department
of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов /

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 15.07.2024

Поступила после рецензирования/Revised 10.09.2024

Принята к публикации/Accepted 17.09.2024