

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

А. Е. Хохлов<sup>1</sup>, В. И. Горбаченко<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Россия  
<sup>1</sup> hohlov59@mail.ru, <sup>2</sup> gorvi@mail.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, описывающее вибрацию пластин под воздействием внешней силы. *Материалы и методы.* Конечно-разностная аппроксимация по пространству и времени этого уравнения приводит к разностным схемам в нестационарной постановке. *Результаты.* Предложен алгоритм реализации разностных схем с расчетом на каждом временном шаге приращений к решению, что позволяет избежать накопления погрешностей. Проведенное исследование устойчивости различных разностных схем позволило вывести условие устойчивости явной схемы и доказать абсолютную устойчивость неявных схем. *Выводы.* Проведенный анализ явных и неявных схем показывает условия устойчивости алгоритмов моделирования.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение бигармонического типа, конечно-разностная аппроксимация, нестационарная постановка, устойчивость явной и неявных разностных схем

**Для цитирования:** Хохлов А. Е., Горбаченко В. И. Анализ устойчивости алгоритмов моделирования колебаний пластин методом конечных разностей // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2022. № 3. С. 158–167. doi:10.21685/2227-8486-2022-3-10

## STABILITY ANALYSIS OF PLATE OSCILLATION MODELING ALGORITHMS ON CELLULAR NEURAL NETWORKS

A.E. Khokhlov<sup>1</sup>, V.I. Gorbachenko<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Penza State University, Penza, Russia  
<sup>1</sup> hohlov59@mail.ru, <sup>2</sup> gorvi@mail.ru

**Abstract.** *Background.* A fourth-order partial differential equation is considered, which describes the vibration of plates under the influence of an external force. *Materials and methods.* A finite-difference approximation in space and time of this equation leads to difference schemes in a non-stationary formulation. *Results.* An algorithm for the implementation of difference schemes is proposed with the calculation of increments to the solution at each time step, which makes it possible to avoid the accumulation of errors. The study of the stability of various difference schemes made it possible to derive a condition for the stability of an explicit scheme and to prove the absolute stability of implicit schemes. *Conclusions.* The performed analysis of explicit and implicit schemes shows the conditions for the stability of modeling algorithms.

**Keywords:** biharmonic differential equation, finite-difference approximation, unsteady formulation, stability of explicit and implicit difference schemes

**For citation:** Khokhlov A.E., Gorbachenko V.I. Stability analysis of plate oscillation modeling algorithms on cellular neural networks. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2022;(3):158–167. (In Russ.). doi:10.21685/2227-8486-2022-3-10

### Введение

Задачи теории упругости, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого порядка, встречаются при проектировании строительных сооружений, тепловых машин и устройств, различного рода металлоконструкций, при проектировании и производстве радиоэлектронной аппаратуры. Основным элементом перечисленных конструкций является плоская пластина, закрепленная или свободная по краям и подверженная различного рода переменным во времени воздействиям: вибрационным, ударным, температурным, акустическим.

Плоской пластиной является цилиндрическое или призматическое тело с малой высотой относительно размеров основания. Для применения теории изгиба должно выполняться условие [1–3]:  $\delta \geq 0,1l$ , где  $\delta$  – толщина пластины;  $l$  – наименьший другой размер пластины. Если это условие не выполняется, то такая пластина считается толстой. С другой стороны, ожидаемые прогибы пластины должны быть малы по сравнению с толщиной. В [1] указано следующее соотношение  $\varphi \leq 0,2\delta$ , где  $\varphi$  – максимальный ожидаемый прогиб. Пластины, не удовлетворяющие этому условию, называют пластинами малой толщины – мембранами. Рассмотрение колебаний толстых пластин и мембран выходит за рамки данной работы.

Вынужденные колебания однородной пластины постоянной толщины, вызванные переменным внешним воздействием, характерным для неавтономных систем, описываются дифференциальным уравнением бигармонического типа [1]:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{P(t)}{D} - \frac{\rho \sigma}{D} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in S, \quad (1)$$

с граничными условиями жесткого защемления:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

и свободного (шарнирного) опирания:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

где  $\varphi(x, y)$  – отклонение точек пластины (искмое решение),  $P(t)$  – внешняя сила (на практике часто внешняя сила изменяется по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $P_0$ :  $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ ),  $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$  –

цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  – модуль Юнга материала пластины;  $\delta$  – толщина пластины;  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала пластины;  $\rho$  – плотность материала пластины;  $S$  – прямоугольная область решения;  $\Gamma$  – граница области.

Можно обозначить через  $d$  коэффициент, характеризующий физические параметры пластины:

$$d = \frac{\rho\sigma}{D} = \frac{12\rho(1-\mu^2)}{E\delta^2}.$$

Так, например, для стальной пластины толщиной 1 см этот коэффициент равен  $46 \cdot 10^{-6} \frac{\text{с}^2}{\text{м}^4}$ .

В нестационарной постановке для решения уравнения (1) кроме граничных условий должны быть заданы еще и начальные условия при  $t = 0$ , т.е. задаются начальное отклонение и начальная скорость точек пластины:

$$\varphi = p, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = q. \quad (4)$$

Известны различные подходы для моделирования колебаний пластин. В частности, используется метод конечных элементов [4–5]. Преимуществом метода конечных элементов является возможность учитывать неоднородность структуры пластин. Основными недостатками метода конечных элементов являются вычислительная сложность и сложность программного обеспечения. Для однородных пластин проще использовать метод конечных разностей. В известных работах, посвященных моделированию колебаний пластин методом конечных разностей [3, 6–9], основное внимание уделяется свободным колебаниям пластин. Зачастую рассматриваются лишь некоторые граничные условия, анализ устойчивости разностных схем проводится для некоторых частных случаев и для явных схем конечно-разностной аппроксимации.

Целью данной работы является разработка алгоритмов моделирования колебаний пластин методом конечных разностей и исследование устойчивости различных разностных схем.

### *Материалы и методы*

Конечно-разностная аппроксимация по пространственным переменным сводит задачу (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени:

$$A\varphi + \gamma \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = f(t), \quad (5)$$

где  $A$  – конечно-разностный оператор бигармонического уравнения;  $f(t) = \frac{P(t)}{D} = \frac{P_0}{D} \cos(2\pi\nu t) = F \cos(2\pi\nu t)$  – функция правой части;  $\nu$  – частота внешней силы;  $F$  – приведенная амплитуда внешней силы;  $h$  – шаг аппрок-

симации по пространству;  $\gamma = dh^4$  – коэффициент, характеризующий пластину и шаг аппроксимации по пространству (например, для стальной пластины толщиной 1 см и шагом аппроксимации 1 см он равен  $46 \cdot 10^{-14} \text{ с}^2$ ).

Каждый элемент вектора  $A\varphi$  имеет вид (рис. 1)

$$20\varphi_{k,l} - 8(\varphi_{k-1,l} + \varphi_{k,l-1} + \varphi_{k+1,l} + \varphi_{k,l+1}) + 2(\varphi_{k-1,l-1} + \varphi_{k+1,l-1} + \varphi_{k-1,l+1} + \varphi_{k+1,l+1}) + (\varphi_{k+2,l} + \varphi_{k,l-2} + \varphi_{k,l+2} + \varphi_{k-2,l}). \quad (6)$$

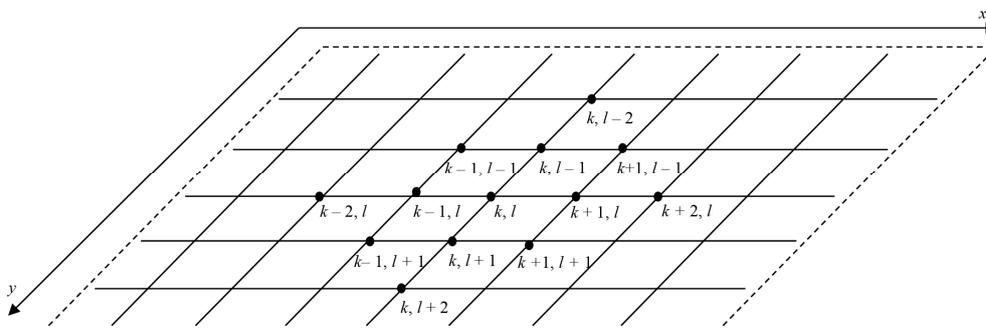


Рис. 1. Конечно-разностная аппроксимация по пространству

Для аппроксимации граничных условий (2) и (3) примем, что контур пластины совпадает с линиями разностной сетки. Чтобы разностный шаблон (рис. 1) действовал для всех узловых точек, в которых рассчитываются отклонения пластины, введем законтурный слой узловых точек (рис. 2). Значения отклонений в законтурных узлах вычисляются из граничных условий.

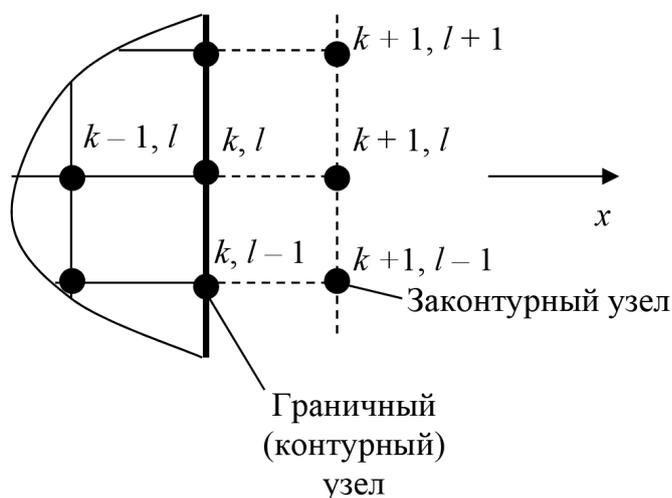


Рис. 2. К определению отклонений в законтурных слоях

Если граница пластины перпендикулярна оси  $x$ , то разностный аналог (рис. 2) условий (2) для жестко защемленного края имеет вид

$$\varphi_{k,l} = 0, \quad \frac{1}{2h}(\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k-1,l}) = 0, \quad (7)$$

откуда

$$\varphi_{k+1,l} = \varphi_{k-1,l}. \quad (8)$$

Для свободно (шарнирно) опертого края пластины условия (3) в разностной форме имеют вид (см. рис. 2)

$$\frac{1}{h^2}(\varphi_{k+1,l} - 2\varphi_{k,l} + \varphi_{k-1,l}) + \frac{\mu}{h^2}(\varphi_{k,l+1} - 2\varphi_{k,l} + \varphi_{k,l-1}) = 0. \quad (9)$$

Так как на контуре пластины отклонение равно нулю, то  $\varphi_{k,l} = \varphi_{k,l+1} = \varphi_{k,l-1} = 0$  и из (9) имеем значение отклонения для законтурной точки

$$\varphi_{k+1,l} = -\varphi_{k-1,l}. \quad (10)$$

### Результаты

Для конечно-разностной аппроксимации задачи (5) по времени введем в рассмотрение систему узловых точек  $t^j = t^{j-1} + \tau$ , где  $\tau$  – шаг аппроксимации по времени,  $j$  – номер временного шага. Можно предложить три разностные схемы в матричной форме, аналогичные приведенным в [9]:

1) явная схема:

$$A\varphi^j + \gamma \frac{\varphi^{j+1} - 2\varphi^j + \varphi^{j-1}}{\tau^2} = f^j; \quad (11)$$

2) неявная схема:

$$A\varphi^{j+1} + \gamma \frac{\varphi^{j+1} - 2\varphi^j + \varphi^{j-1}}{\tau^2} = f^{j+1}; \quad (12)$$

3) неявная схема (аналог схемы Кранка – Николсон):

$$\frac{1}{2}(A\varphi^{j+1} + A\varphi^{j-1}) + \gamma \frac{\varphi^{j+1} - 2\varphi^j + \varphi^{j-1}}{\tau^2} = f^j. \quad (13)$$

Для всех трех схем должны быть заданы начальные условия исходя из (4):

$$\varphi^0 = p, \quad \varphi^1 = p + q\tau. \quad (14)$$

На практике чаще всего начальное отклонение и начальная скорость точек пластины нулевые, поэтому  $\varphi^0 = \varphi^1 = 0$ .

Для явной схемы (11) решение на каждом последующем временном шаге  $j + 1$  находится из решения на двух предыдущих шагах  $j$  и  $j - 1$ :

$$\varphi^{j+1} = 2\varphi^j - \frac{\tau^2}{\gamma} A\varphi^j - \varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} f^j \quad (15)$$

или

$$\varphi^{j+1} = (2 - \frac{\tau^2}{\gamma} A)\varphi^j - \varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} f^j. \quad (16)$$

Формула (16) легко реализуется. Однако при ее использовании могут накапливаться погрешности округления. Чтобы ослабить влияние погрешностей, можно рассчитывать на каждом шаге не приближенное решение  $\varphi^{j+1}$ , а приращение решения  $\Delta\varphi^{j+1}$ . Само решение затем находится по формуле

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j + \Delta\varphi^{j+1}. \quad (17)$$

В этом случае формулу (15) можно представить в виде

$$\Delta\varphi^{j+1} = 2\Delta\varphi^j - \frac{\tau^2}{\gamma} A\Delta\varphi^j - \Delta\varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} \Delta f^j, \quad (18)$$

где  $\Delta\varphi^j = \varphi^j - \varphi^{j-1}$ ,  $\Delta\varphi^{j-1} = \varphi^{j-1} - \varphi^{j-2}$ ,  $\Delta f^j = f^j - f^{j-1}$ .

Исходными данными для моделирования являются амплитуда  $F$  и частота  $\nu$  внешней силы, а также  $T$  – заданный интервал времени, на котором надо найти решение, и  $\tau$  – шаг аппроксимации по времени. Исходя из нулевых начальных условий (14), обнуляются отклонения в нулевой, первый и второй моменты времени, а также начальные приращения отклонений. Из-за этого в явной схеме реальный расчет отклонений может начинаться только с третьего момента времени под воздействием внешней силы с предыдущего момента времени, т.е. со второго момента. Тогда внешнюю силу в нулевой и первый моменты времени, а также ее начальное приращение можно тоже обнулить.

Затем начинается циклический расчет отклонений на каждом временном шаге. Каждый шаг цикла начинается с увеличения на единицу номера шага времени и увеличения дискретного времени на величину шага аппроксимации по времени. Затем рассчитывается очередное значение внешней силы и ее приращение. Главный и самый трудоемкий расчет очередного приращения решения происходит по формуле (18). Затем рассчитывается очередное решение и переприсваиваются приращения предыдущих отклонений. Окончание процесса моделирования происходит тогда, когда текущее время превысит заданное время колебаний.

Основным недостатком явной схемы является ее условная устойчивость.

### Обсуждение

Рассмотрим явную схему (18):

$$\varphi^{j+1} = \left(2 - \frac{\tau^2}{\gamma} A\right)\varphi^j - \varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} f^j.$$

Применяя спектральный критерий устойчивости по Нейману [10], получим условие устойчивости этой схемы:

$$\left|2E - \frac{\tau^2}{\gamma} \lambda_i\right| \leq 1, \quad (19)$$

где  $\lambda_i \leq \beta(A)$  – собственные числа оператора  $A$ ;  $\beta(A)$  – спектральный радиус оператора  $A$ .

Решив неравенство (19) относительно  $\tau$ , получаем

$$\tau \leq \sqrt{3 \frac{\gamma}{\beta(A)}}. \quad (20)$$

Одним из следствий теоремы Гершгорина [11] является следующая оценка для спектрального радиуса матрицы  $A$ :  $\beta(A) \leq S$ , где  $S = \max_k \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ki}|$  – максимальная сумма модулей коэффициентов разностного оператора  $A$ . Для разностного оператора бигармонического уравнения (6)  $S = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 = 44$ . Тогда условием устойчивости явной схемы при моделировании вынужденных колебаний пластин будет

$$\tau \leq \sqrt{0,068\gamma}. \quad (21)$$

Как уже отмечалось ранее, например, для стальной пластины толщиной 1 см и шагом аппроксимации по пространству 1 см  $\gamma = 46 \cdot 10^{-14} \text{ с}^2$ . Тогда шаг аппроксимации по времени должен быть очень малым:  $\tau \leq 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ с} = 177 \text{ нс}$ .

Таким образом, существенным недостатком явной схемы следует признать ее условную устойчивость, т.е. существенное ограничение на длительность интервала между соседними временными шагами.

Из неявной схемы (12) можно получить систему линейных уравнений для расчета  $\varphi^{j+1}$ , каждое уравнение которой имеет вид

$$\left( A + \frac{\gamma}{\tau^2} E \right) \varphi^{j+1} = 2 \frac{\gamma}{\tau^2} \varphi^j - \frac{\gamma}{\tau^2} \varphi^{j-1} + f^{j+1}. \quad (22)$$

Учитывая положительную определенность и разреженный характер матрицы системы (22), целесообразно применять итерационные методы решения этой системы.

Решение системы уравнений (22) можно также получить из приращений  $\Delta\varphi^{j+1}$ . Для этого на каждом временном шаге надо решать систему уравнений:

$$\left( A + \frac{\gamma}{\tau^2} E \right) \Delta\varphi^{j+1} = \Delta G, \quad (23)$$

где  $\Delta G = \frac{\gamma}{\tau^2} (2\Delta\varphi^j - \Delta\varphi^{j-1}) + \Delta f^{j+1}$ , а затем находить очередное приближение решения  $\varphi^{j+1} = \varphi^j + \Delta\varphi^{j+1}$ .

Рассмотрим устойчивость неявной схемы (12). Из (23) можно получить

$$\varphi^{j+1} = 2 \left( \frac{\tau^2}{\gamma} A + E \right)^{-1} \varphi^j - \left( \frac{\tau^2}{\gamma} A + E \right)^{-1} \varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} \left( \frac{\tau^2}{\gamma} A + E \right)^{-1} f^{j+1}. \quad (24)$$

Условие устойчивости по Нейману в этом случае имеет вид

$$\left| \frac{1}{\frac{\tau^2}{\gamma} \lambda_i + 1} \right| \leq 1, \quad (25)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа оператора  $A$ .

При  $\lambda_i > 0$  и  $\gamma > 0$  это условие выполняется при любых  $\tau$ , значит, неявная схема абсолютно устойчива.

Из неявной схемы Кранка – Николсон (13) можно получить систему линейных уравнений для расчета  $\varphi^{j+1}$ :

$$\left( A + \frac{2\gamma}{\tau^2} E \right) \varphi^{j+1} = \frac{4\gamma}{\tau^2} \varphi^j - \left( A + \frac{2\gamma}{\tau^2} E \right) \varphi^{j-1} + 2f^j. \quad (26)$$

Система (26) также может быть решена одним из итерационных методов, так как матрица  $A + \frac{2\gamma}{\tau^2} E$  положительно определена.

Решение также можно получить из приращений  $\Delta\varphi^{j+1}$ . Для этого на каждом временном шаге надо решать систему уравнений:

$$\left( A + \frac{2\gamma}{\tau^2} E \right) \Delta\varphi^{j+1} = \Delta G, \quad (27)$$

где  $\Delta G = \frac{4\gamma}{\tau^2} \Delta\varphi^j - \left( A + \frac{2\gamma}{\tau^2} E \right) \Delta\varphi^{j-1} + 2\Delta f^{j+1}$ , а затем находить очередное приближение решения  $\varphi^{j+1} = \varphi^j + \Delta\varphi^{j+1}$ .

Рассмотрим устойчивость неявной схемы (13). Из (26) можно получить

$$\varphi^{j+1} = \left( \frac{\tau^2}{2\gamma} A + E \right)^{-1} 2\varphi^j - \varphi^{j-1} + \frac{\tau^2}{\gamma} \left( \frac{\tau^2}{2\gamma} A + E \right)^{-1} f^j. \quad (28)$$

Для устойчивости этой схемы по критерию Неймана достаточно выполнения условия

$$\left| \frac{1}{\frac{\tau^2}{2\gamma} \lambda_i + 1} \right| \leq 1. \quad (29)$$

При  $\lambda_i > 0$  и  $\gamma > 0$  это условие выполняется при любых  $\tau$ , значит, схема (28) абсолютно устойчива.

### Выводы

В работе исследована нестационарная постановка задач на вынужденные колебания пластин, предложен алгоритм реализации разностных схем

с расчетом на каждом временном шаге приращений к решению, что позволяет избежать накопления погрешностей. Проведенное исследование устойчивости различных разностных схем позволило вывести условие устойчивости явной схемы и доказать абсолютную устойчивость неявных схем.

### Список литературы

1. Weaver W., Timoshenko S. P., Young S. P. *Vibration Problems in Engineering*. 5th ed. Hoboken : Wiley Interscience, 1990. 624 p.
2. Reddy J. N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton : CRC Press, 2006. 568 p.
3. Фролов К. В., Окопный Ю. А., Жинжер Н. Н. *Вибрации в технике : справочник : в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем*. М. : Машиностроение, 1978. 482 с.
4. Petyt M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. 516 p.
5. Palazzolo A. *Vibration Theory and Applications with Finite Elements and Active Vibration Control*. Hoboken : Wiley, 2016. 976 p.
6. Al Rjoub Y. S., Abdeljaber O. Free and forced vibration of rectangular plates using the finite difference method // *Green Building, Materials and Civil Engineering* / ed. by B. C. M. Kao, Wen-Pei Sung, R. Chen. London : Taylor & Francis Group, 2015. URL: <https://www.taylorfrancis.com/books/edit/10.1201/b17568/green-building-materials-civil-engineering-jimmy-cao-wen-pei-sung-ran-chen?refId=6c177f52-1563-4c95-b1cc-b0e500727845&context=ubx> (дата обращения: 20.07.2022).
7. Mat Darus I. Z., Tokhi M. O. Finite Difference Simulation of a Flexible Plate Structure // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2004. Vol. 23, № 1. P. 27–46.
8. Mukhopadhyay M. Finite Difference Method for the Vibration Analysis of Beams and Plates // *Structural Dynamics*. 2021. P. 491–514.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М. : Наука, 1989. 432 с.
10. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М. : Наука, 1973. 416 с.
11. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М. : Наука, 1968. 576 с.

### References

1. Weaver W., Timoshenko S.P., Young S.P. *Vibration Problems in Engineering*. 5th ed. Hoboken: Wiley Interscience, 1990:624.
2. Reddy J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton: CRC Press, 2006:568.
3. Frolov K.V., Okopnyy Yu.A., Zhinzher N.N. *Vibratsii v tekhnike : spravochnik : v 6 t. T. 1. Kolebaniya lineynykh system = Vibrations in engineering : handbook : in 6 vols. 1. Vibrations of linear systems*. Moscow: Mashinostroenie, 1978:482. (In Russ.)
4. Petyt M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010:516.
5. Palazzolo A. *Vibration Theory and Applications with Finite Elements and Active Vibration Control*. Hoboken: Wiley, 2016:976.
6. Al Rjoub Y.S., Abdeljaber O. Free and forced vibration of rectangular plates using the finite difference method. *Green Building, Materials and Civil Engineering*. London: Taylor & Francis Group, 2015. Available at: <https://www.taylorfrancis.com/books/edit/10.1201/b17568/green-building-materials-civil-engineering-jimmy-cao-wen-pei-sung-ran-chen?refId=6c177f52-1563-4c95-b1cc-b0e500727845&context=ubx> (accessed 20.07.2022).
7. Mat Darus I.Z., Tokhi M.O. Finite Difference Simulation of a Flexible Plate Structure. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2004;23(1):27–46.

8. Mukhopadhyay M. Finite Difference Method for the Vibration Analysis of Beams and Plates. *Structural Dynamics*. 2021:491–514.
9. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennyye metody = Numerical methods*. Moscow: Nauka, 1989:432. (In Russ.)
10. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Ustoychivost' raznostnykh skhem = Stability of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1973:416. (In Russ.)
11. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits = Matrix theory*. Moscow: Nauka, 1968:576. (In Russ.)

***Информация об авторах / Information about the authors***

**Алексей Евгеньевич Хохлов**

доцент, доцент кафедры  
информационно-вычислительных  
систем,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: hohlov59@mail.ru

**Aleksey E. Khokhlov**

Associate professor, associate professor  
of the sub-department of information  
and computing systems,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Владимир Иванович Горбаченко**

доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой компьютерных  
технологий,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: gorvi@mail.ru

**Vladimir I. Gorbachenko**

Doctor of technical sciences, professor,  
head of the sub-department  
of computer technologies,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /  
The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 16.05.2022**

**Поступила после рецензирования/Revised 01.08.2022**

**Принята к публикации/Accepted 02.09.2022**